

Exo 1 : on rappelle l'identité

$$\varepsilon_{ijh} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{hm} - \delta_{jm} \delta_{hl}$$

Démontrons tout d'abord l'identité

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (1)$$

On a

$$(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i = \varepsilon_{ijh} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_h = \varepsilon_{ijh} \varepsilon_{hlm} a_j b_l c_m$$

$$= \varepsilon_{hij} \varepsilon_{hlm} a_j b_l c_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m$$

$$= a_j c_j b_i - a_j b_j c_i = (\vec{a} \cdot \vec{c}) b_i - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c_i$$

pour tout  $i = 1, 2, 3$ , et on retrouve bien (1).

i) En utilisant (1) on obtient

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$= \cancel{(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b}} - \cancel{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}} + \cancel{(\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{c}} - \cancel{(\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}} \\ + \cancel{(\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{a}} - \cancel{(\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}}$$

soit

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

ii) En utilisant à nouveau (1) on obtient

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \left[ \underbrace{((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}) \vec{c}} - \underbrace{((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}) \vec{a}} \right]$$

$= 0$  car  $\vec{b} \times \vec{c} \perp \vec{c}$

$$= [ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) ] [ \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) ]$$

et donc, avec l'invariance du produit mixte par permutation circulaire,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})] = [ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) ]^2$$

$$\text{iii) } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b})_i (\vec{c} \times \vec{d})_i$$

$$= \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} a_j b_k c_l d_m$$

$$= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m$$

$$= a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k$$

et on a donc bien

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Exo 2 : soient  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  et  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

deux vecteurs linéairement indépendants dans l'espace euclidien à 3 dimensions,  $\mathbb{R}^3$ .

(2)

1) Par construction,  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$  et  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ . Ainsi,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{a} \times \vec{b}$  sont 3 vecteurs linéairement indépendants, et

$$\mathcal{B} = \{ \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \}$$

est donc une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ . De plus, le cardinal de  $\mathcal{B}$  est égal à la dimension de  $\mathbb{R}^3$ . Or, on connaît l'équivalence

$$\mathcal{B} \text{ libre et card } \mathcal{B} = \dim \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{B}$  étant une base de  $\mathbb{R}^3$ , tout vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{B}$ , ie

$$\vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{a} \times \vec{b}$$

2) a) On veut étudier les solutions  $\vec{x}$  de l'équation

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b} \quad (1)$$

NB : d'ailleurs, l'équation (1) n'admet des solutions qu'à la condition que les deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  soient perpendiculaires

L'équation vectorielle (1) n'est rien d'autre qu'un système linéaire d'équations à 3 inconnues. En écrivant  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  on a donc

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b} \quad (\Rightarrow) \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Supposons par exemple que  $a_3 \neq 0$ , la dernière équation de (2) nous donne

$$x_1 = \frac{b_2 + a_1 x_3}{a_3} \quad (3)$$

En supposant maintenant que  $a_1 \neq 0$ , on tire de (3) et de la troisième équation de (2)

$$x_2 = \frac{1}{a_1} \left[ b_3 + \frac{a_2}{a_3} (b_2 + a_1 x_3) \right] \quad (4)$$

Enfin, on tire de (3) - (4) et de la première équation de (2)

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

ce qui n'est rien d'autre que la condition d'existence d'une solution  $\vec{x}$  de l'équation (1), ie  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Ainsi,

(1) laisse une composante de  $\vec{x}$  complètement indéterminée.

L'équation  $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$  n'admet donc pas de solution

unique, mais une classe de solutions de la forme

(avec  $a_1 \neq 0$  et  $a_3 \neq 0$ )

$$(5) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_3} (b_2 + a_1 x) \\ \frac{1}{a_1} \left( b_3 + \frac{a_2}{a_3} (b_2 + a_1 x) \right) \\ x \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) On pose maintenant  $\vec{a} = (2, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, -2)$  et  $\vec{c} = (1, 1, -2)$  (dans une base orthonormée directe).

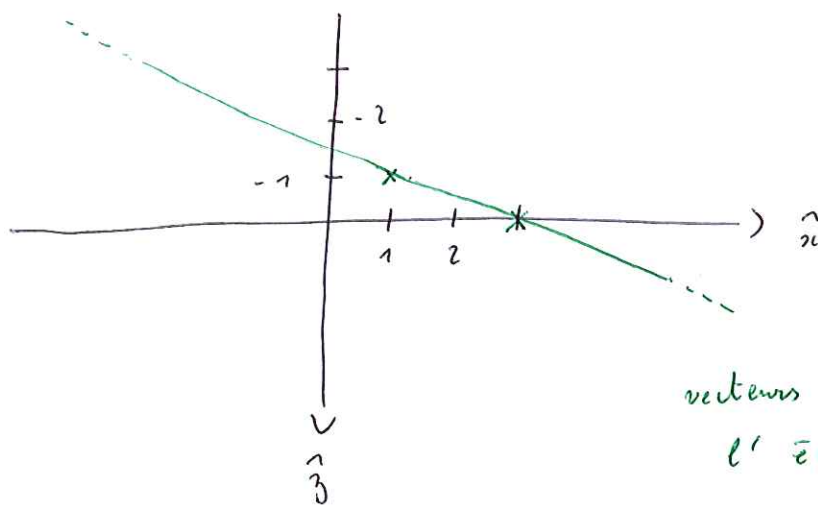
i) L'équation  $\vec{a} \times \vec{n} = \vec{b}$  : tout d'abord, puisque

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

l'équation  $\vec{a} \times \vec{n} = \vec{b}$  admet bien des solutions. On résout facilement le système linéaire  $\vec{a} \times \vec{n} = \vec{b}$ , et on trouve que les solutions  $\vec{n}$  sont données par l'ensemble des vecteurs de la forme

$$(6) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En déterminant  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  la base orthonormée, on voit donc que la composante selon  $\hat{y}$  de  $\vec{n}$  est fixée. Représentons donc le lieu des extrémités des solutions  $\vec{n}$  dans le plan  $(\hat{z}, \hat{x})$ , qui forme une droite.



lieu des extrémités des vecteurs  $\vec{n}$  solution de l'équation  $\vec{a} \times \vec{n} = \vec{b}$

ii) L'équation  $\vec{b} \times \vec{n} = \vec{c}$  : puisque

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (1, 3, -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

l'équation  $b^T x \vec{x} = \vec{c}$  n'admet aucune solution.

iii) l'équation  $\vec{a}^T x \vec{x} = \vec{c}$ ; puisque

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (2, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

l'équation  $\vec{a}^T x \vec{x} = \vec{c}$  admet bien des solutions, que l'on peut écrire sous la forme

$$(7) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

On souhaite maintenant déterminer la solution de norme minimale. Puisque la norme  $\|\vec{x}\|$  est donnée par

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{4}(x-1)^2}$$

on a, en dérivant par rapport à  $x$ ,

$$\frac{d\|\vec{x}\|}{dx} = \frac{2x + \frac{1}{2}(x-1)}{2\sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{4}(x-1)^2}}$$

d'où

$$\left. \frac{d\|\vec{x}\|}{dx} \right|_{x=x_{\min}} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad x_{\min} = \frac{1}{5}$$

la solution  $\vec{x}_{\min}$  de  $\vec{a}^T x \vec{x} = \vec{c}$  de norme minimale est donc

$$\vec{x}_{\min} = \begin{pmatrix} x_{\min} \\ -1 \\ \frac{1}{2}(x_{\min} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -1 \\ -2/5 \end{pmatrix} \quad (8)$$

3) - 4) les équations  $\vec{a}^T x \vec{x} = \vec{x} + b^T$  et  $\vec{a}^T x (b^T x \vec{x}) = (\vec{a}^T x b^T) x \vec{x}$  sont toujours des systèmes linéaires; les résoudre est relativement lourd, mais ne pose pas de difficulté de principe

Exo 3 : dans cet exo on utilisera les relations suivantes  
 entre les opérateurs différentiels et la convention d'Einstein  
 et le symbole de Levi-Civita :

(3)

$$\operatorname{div} \vec{a} = \partial_i a_i$$

$$(\operatorname{grad}(\varphi))_i = \partial_i \varphi$$

$$(\operatorname{rot} \vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j a_k$$

$$(\Delta \vec{a})_i = \partial_j \partial_j a_i$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad (\operatorname{grad}(fg))_i &= \partial_i (fg) = g \partial_i f + f \partial_i g \\ &= f (\operatorname{grad} g)_i + g (\operatorname{grad} f)_i \quad \forall i \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \operatorname{div}(f\vec{a}) &= \partial_i (f\vec{a})_i = \partial_i (fa_i) = a_i \partial_i f + f \partial_i a_i \\ &= a_i (\operatorname{grad} f)_i + f \operatorname{div} \vec{a} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\operatorname{div}(f\vec{a}) = f \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} f}$$

$$\text{iii)} \quad \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \partial_i (\vec{a} \times \vec{b})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

soit, puisque  $\varepsilon_{ijk}$  est constant (il ne dépend pas des variables d'espace),

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i (a_j b_k)$$

$$= \varepsilon_{ijk} (\partial_i a_j) b_k + \varepsilon_{ijk} a_j \partial_i b_k$$

d'où, puisque  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$  et  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \underbrace{\left[ \varepsilon_{kij} \partial_i a_j \right]}_{= (\operatorname{rot} \vec{a})_k} b_k - \underbrace{\left[ \varepsilon_{jik} \partial_i b_k \right]}_{= (\operatorname{rot} \vec{b})_j} a_j$$

$$= (\operatorname{rot} \vec{a})_k b_k - (\operatorname{rot} \vec{b})_j a_j$$

soit

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}}$$

$$\text{iv) } (\operatorname{rot} f\vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j (f a_k)$$

$$= \varepsilon_{ijk} (\partial_j f) a_k + \varepsilon_{ijk} f \partial_j a_k$$

$$= f \left[ \varepsilon_{ijk} \partial_j a_k \right] + \varepsilon_{ijk} (\operatorname{grad} f)_j a_k$$

$$= f (\operatorname{rot} \vec{a})_i + (\operatorname{grad} f \times \vec{a})_i \quad \forall i$$

soit

$$\boxed{\operatorname{rot}(f\vec{a}) = f \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} f \times \vec{a}}$$



$$v) (\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{a})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{\text{rot}} \vec{a})_k$$

$$= \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l a_m$$

soit, puisque  $\epsilon_{klm}$  constant,

$$(\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{a})_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l a_m$$

$$= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l a_m$$

d'où, en utilisant l'identité reliant  $\epsilon$  à  $\delta$  (cf exo 1)

$$(\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{a})_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l a_m$$

$$= \delta_{il} \delta_{jm} \partial_j \partial_l a_m - \delta_{im} \delta_{jl} \partial_j \partial_l a_m$$

$$= \partial_i \partial_j a_j - \partial_j \partial_j a_i$$

$$= \partial_i \text{div} \vec{a} - (\Delta \vec{a})_i = (\text{grad div} \vec{a})_i - (\Delta \vec{a})_i, \quad \forall i$$

soit

$$\boxed{\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{a} = \text{grad div} \vec{a} - \Delta \vec{a}}$$

$$\forall i) (\vec{\text{rot}} (\vec{a} \times \vec{b}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\vec{a} \times \vec{b})_k$$

$$= \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} a_l b_m)$$

$$= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} (\partial_j a_l) b_m + \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} a_l \partial_j b_m$$

soit, en utilisant l'identité reliant  $\epsilon$  à  $\delta$ ,

$$(\vec{rot}(\vec{a} \times \vec{b}))_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (\partial_j a_l) b_m$$

$$+ (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_l \partial_j b_m$$

$$= \delta_{il} \delta_{jm} (\partial_j a_l) b_m - \delta_{im} \delta_{jl} (\partial_j a_l) b_m$$

$$+ \delta_{il} \delta_{jm} a_l \partial_j b_m - \delta_{im} \delta_{jl} a_l \partial_j b_m$$

$$= b_j \partial_j a_i - \partial_j a_j b_i + \partial_j b_j a_i - a_j \partial_j b_i$$

$$= (\vec{b} \cdot \vec{grad}) a_i - (\vec{a} \cdot \vec{grad}) b_i + \text{div}(\vec{b}) a_i - \text{div}(\vec{a}) b_i, \quad \forall i$$

soit

$$\vec{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{grad}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{grad}) \vec{b} + \vec{a} \text{ div} \vec{b} - \vec{b} \text{ div} \vec{a}$$

Exo 4 : on souhaite ici calculer la divergence et le rotationnel d'un champ de vecteur  $\vec{a}$  en coordonnées sphériques en utilisant les versions infinitésimales appropriées du théorème de Stokes.

(4,1)

i) div  $\vec{a}$  : on souhaite exprimer  $\text{div } \vec{a}$  en coordonnées sphériques.

Pour cela on utilise la version infinitésimale du théorème de Stokes pour la divergence. On a

$$\iiint_V dV \text{div } \vec{a} = \oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{s} = \oiint_S ds \vec{n} \cdot \vec{a}$$

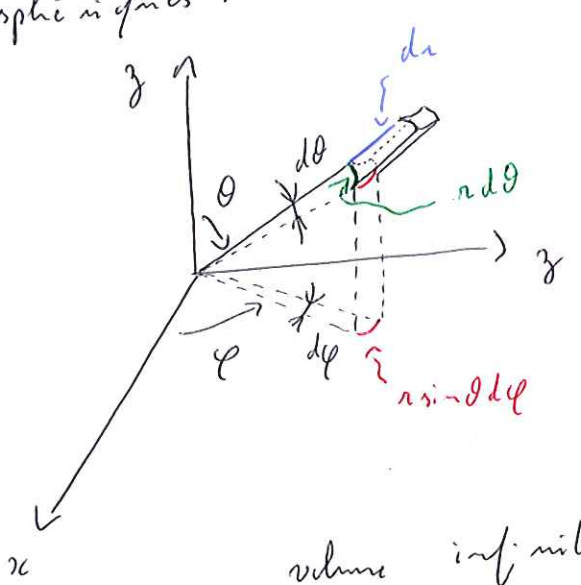
où  $S$  est la surface fermée délimitant le volume  $V$ . la version infinitésimale dans ce cas est donc

$$\text{div}(\vec{a}) dV = \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

où  $d\vec{s} = ds \vec{n}$  est la surface élémentaire fermée orientée délimitant le volume infinitésimal  $dV$ . On travaille donc en coordonnées sphériques.

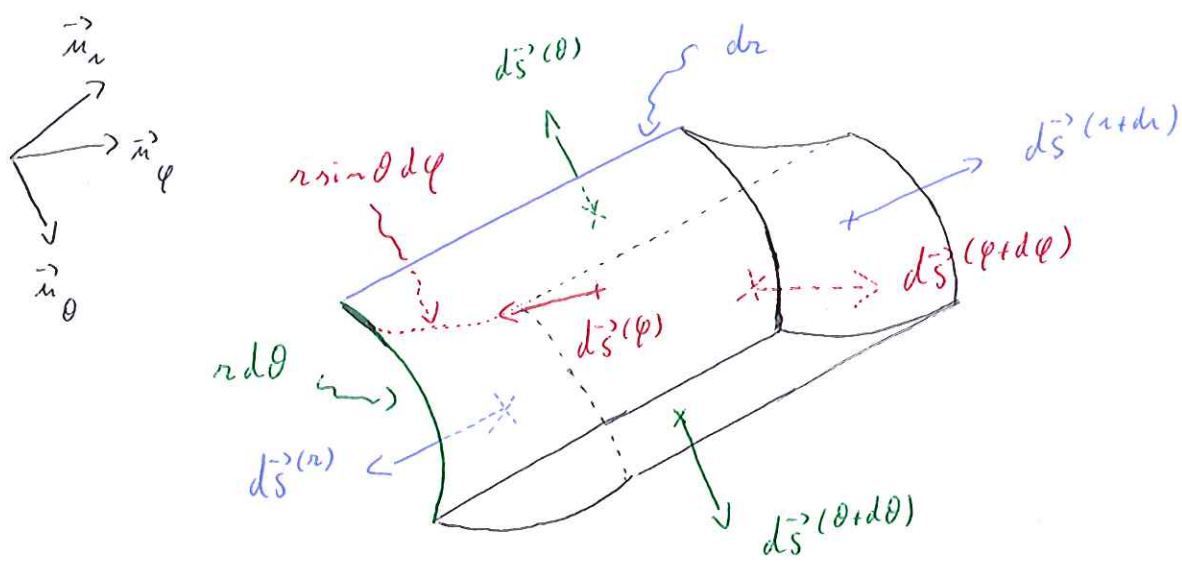
l'élément de volume infinitésimal en sphériques est

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$



On divise maintenant la surface fermée élémentaire  $d\vec{s}$  délimitant le volume infinitésimal  $dV$  en 6 surfaces élémentaires

ouvertes orientées. l'orientation de chacune de ces surfaces ouvertes élémentaires est dirigée vers l'extérieur du volume  $dV$ .



où l'on a donc défini les surfaces élémentaires suivantes :

$d\vec{S}^{(r)}$ ,  $d\vec{S}^{(r+dr)}$   $\equiv$  surfaces élémentaires à  $r$ ,  $r+dr$  constantes

$d\vec{S}^{(\theta)}$ ,  $d\vec{S}^{(\theta+d\theta)}$   $\equiv$  surfaces élémentaires à  $\theta$ ,  $\theta+d\theta$  constantes

$d\vec{S}^{(\phi)}$ ,  $d\vec{S}^{(\phi+d\phi)}$   $\equiv$  surfaces élémentaires à  $\phi$ ,  $\phi+d\phi$  constantes

On trouve donc :

$$\begin{cases} d\vec{S}^{(r)} = -r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{n}_r \\ d\vec{S}^{(r+dr)} = + (r+dr)^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{n}_r \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} d\vec{S}^{(\theta)} = -r dr \sin\theta d\phi \vec{n}_\theta \\ d\vec{S}^{(\theta+d\theta)} = + r dr \sin(\theta+d\theta) d\phi \vec{n}_\theta \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} d\vec{S}^{(\phi)} = -r dr d\theta \vec{n}_\phi \\ d\vec{S}^{(\phi+d\phi)} = + r dr d\theta \vec{n}_\phi \end{cases} \quad (1c)$$

Explicitons à présent le champ  $\vec{u}$  sur ces différentes

surfaces élémentaires. On écrit, en coordonnées sphériques,

$$\vec{a} = \vec{a}(r, \theta, \varphi) = a_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + a_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + a_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

les différentes surfaces ouvertes  $dS$  considérées ici étant (42) infinitésimales, on peut donc prendre  $\vec{a}$  constant sur chacune de ces surfaces. Par exemple, sur la surface  $dS^{(r+dr)}$ , la valeur de  $\vec{a}$  reste constante et est donnée par

$$[\vec{a}(r, \theta, \varphi)]_{dS^{(r+dr)}} = a_r(r+dr, \theta, \varphi) \vec{u}_r + a_\theta(r+dr, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + a_\varphi(r+dr, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

(2)

NB: on pourrait très bien prendre, au lieu de  $a_{r, \theta, \varphi}(r+dr, \theta, \varphi)$ , par exemple  $a_{r, \theta, \varphi}(r+dr, \theta + \varepsilon_1 d\theta, \varphi + \varepsilon_2 d\varphi)$ ,  $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$  petits, cela ne changerait rien au résultat final. En effet, on ferait alors un développement de Taylor de la forme

$$a_{r, \theta, \varphi}(r+dr, \theta + \varepsilon_1 d\theta, \varphi + \varepsilon_2 d\varphi) = a_{r, \theta, \varphi}(r+dr, \theta, \varphi) + \varepsilon_1 d\theta \frac{\partial a}{\partial \theta} + \mathcal{O}(d\theta^2) + \varepsilon_2 d\varphi \frac{\partial a}{\partial \varphi} + \mathcal{O}(d\varphi^2)$$

En calculant à dessous  $\vec{a} \cdot d\vec{S}^{(r+dr)}$ , on annule alors des termes de la forme  $\varepsilon_1 d\theta^2 \frac{\partial a}{\partial \theta} d\varphi$ ,  $\varepsilon_2 d\theta d\varphi^2 \frac{\partial a}{\partial \varphi}$ , puis, après division par le volume élémentaire  $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ , ces termes resteraient alors linéaires en  $d\theta$  ou  $d\varphi \Rightarrow$  tous ces termes s'annulent alors à la fin de la procédure où l'on prend la limite  $dr, d\theta, d\varphi \rightarrow 0$ .

↳ la valeur (2) de  $\vec{a}$  sur la surface  $dS^{(r+dr)}$  est donc

adéquate

En écrivait donc les valeurs constantes des champ  $\vec{a}$  sur chacune des 6 surfaces ouvertes élémentaires (qui sont de la forme (2)), on obtient donc de la version infinitésimale du théorème de Stokes (et en utilisant les expressions (1) de chaque élément de surface)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{a}) dV &= \vec{a} \cdot d\vec{S} \\ &= \vec{a} \cdot d\vec{S}^{(r+dr)} + \vec{a} \cdot d\vec{S}^{(\varphi)} + \vec{a} \cdot d\vec{S}^{(\theta+d\theta)} + \vec{a} \cdot d\vec{S}^{(\theta)} \\ &\quad + \vec{a} \cdot d\vec{S}^{(\varphi+d\varphi)} + \vec{a} \cdot d\vec{S}^{(\varphi)} \\ &= \left[ a_r(r+dr, \theta, \varphi) (r+dr)^2 - a_r(r, \theta, \varphi) r^2 \right] \sin\theta d\theta d\varphi \\ &\quad + \left[ a_\theta(r, \theta+d\theta, \varphi) \sin(\theta+d\theta) - a_\theta(r, \theta, \varphi) \sin\theta \right] r dr d\varphi \\ &\quad + \left[ a_\varphi(r, \theta, \varphi+d\varphi) - a_\varphi(r, \theta, \varphi) \right] r dr d\theta \end{aligned}$$

d'où, en divisant des deux côtés par  $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \left[ a_r(r+dr, \theta, \varphi) (r+dr)^2 - a_r(r, \theta, \varphi) r^2 \right] \frac{1}{r^2 dr} \\ &\quad + \left[ a_\theta(r, \theta+d\theta, \varphi) \sin(\theta+d\theta) - a_\theta(r, \theta, \varphi) \sin\theta \right] \frac{1}{r \sin\theta d\theta} \\ &\quad + \left[ a_\varphi(r, \theta, \varphi+d\varphi) - a_\varphi(r, \theta, \varphi) \right] \frac{1}{r \sin\theta d\varphi} \end{aligned}$$

et on prend maintenant la limite  $dr, d\theta, d\varphi \rightarrow 0$  pour

obtenir

(43)

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \lim_{dr \rightarrow 0} \frac{a_r(r+dr, \theta, \varphi) (r+dr)^2 - a_r(r, \theta, \varphi) r^2}{dr}$$

$$+ \frac{1}{r \sin \theta} \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{a_\theta(r, \theta+d\theta, \varphi) \sin(\theta+d\theta) - a_\theta(r, \theta, \varphi) \sin \theta}{d\theta}$$

$$+ \frac{1}{r \sin \theta} \lim_{d\varphi \rightarrow 0} \frac{a_\varphi(r, \theta, \varphi+d\varphi) - a_\varphi(r, \theta, \varphi)}{d\varphi}$$

où l'on reconnaît des dérivées partielles  $\partial/\partial r, \partial/\partial \theta, \partial/\partial \varphi$ .  
 On a donc montré que

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) a_\theta] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

### DIVERGENCE EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

ii)  $\operatorname{rot} \vec{a}$  : on souhaite maintenant exprimer  $\operatorname{rot} \vec{a}$  en coordonnées sphériques. Pour cela on utilise la version infinitésimale du théorème de Stokes pour le rotationnel. On a

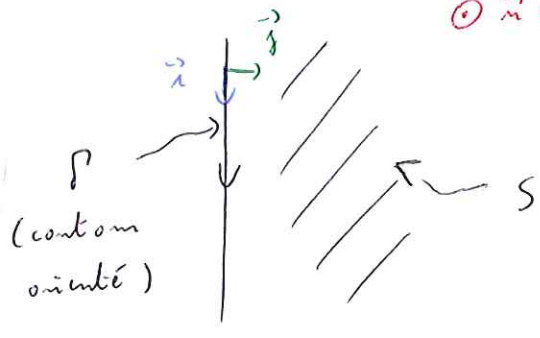
$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

où  $\mathcal{L}$  est un contour fermé délimitant la surface (ouverte)  $S$ .  
 La version infinitésimale dans ce cas est donc

$$\operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

où  $d\vec{l}$  est le contour fermé orienté infinitésimal délimitant la surface ouverte orientée élémentaire  $d\vec{S}$ . L'orientation de  $d\vec{S}$  détermine directement l'orientation de  $d\vec{l}$ . En effet, on rappelle la procédure générale.

$\odot \vec{n} = \vec{r} \times \vec{\delta}$



On considère un contour orienté  $P$ . On construit alors le vecteur unitaire  $\vec{r}$  tangent à  $P$  et orienté selon l'orientation de  $P$ . On construit ensuite le vecteur unitaire  $\vec{\delta}$ ,  $\perp$  à  $\vec{r}$  et dirigé vers l'intérieur de la surface  $S$ . L'orientation de  $S$ , ie le vecteur  $\vec{n}$  normal à la surface, est alors construit de telle manière à ce que le repère  $(\vec{r}, \vec{\delta}, \vec{n})$  forme un trièdre direct, ie  $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{\delta}$ .

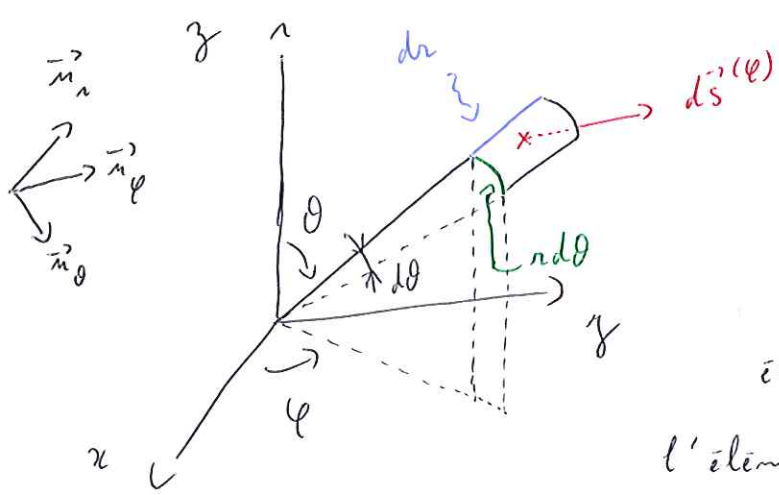
Ainsi, connaissant l'orientation de la surface, ie  $\vec{n}$ , l'orientation  $\vec{r}$  du contour est fixée sans ambiguïté.

On se propose donc de calculer, par exemple, la composante selon  $\vec{n}_\varphi$  de  $\int \vec{r} \cdot \vec{a}$ . Pour cela, on travaille donc avec une version infinitésimale de Stokes, on travaille donc avec une surface élémentaire  $d\vec{S}(\varphi)$  orientée à  $\varphi$  constant.

L'élément de surface  $d\vec{S}(\varphi)$  est donc donné par

$d\vec{S}(\varphi) = r dr d\theta \vec{n}_\varphi$

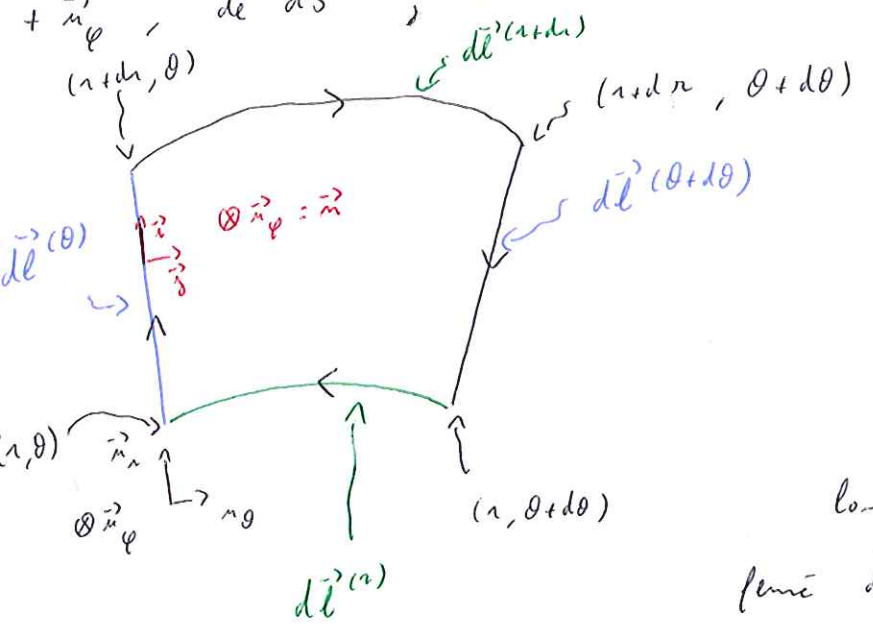
Soit maintenant  $d\vec{l}$  le contour élémentaire, fermé, orienté délimitant l'élément de surface  $d\vec{S}(\varphi)$ . Son





orientation est directement liée par l'orientation, selon  $+ \vec{n}_\varphi$  de  $d\vec{S}(\varphi)$ , et on a :

(4)



On divise le contour fermé orienté  $d\vec{l}$  en 4 contours orientés simples,  $d\vec{l}^{(\theta)}$ ,  $d\vec{l}^{(r + dr)}$ ,  $d\vec{l}^{(\theta + d\theta)}$  et  $d\vec{l}^{(r)}$ . Les éléments de longueurs constituant le contour fermé  $d\vec{l}$  sont donnés par (en

tenant compte de l'orientation de  $d\vec{l}$  liée par l'orientation de la surface élémentaire  $d\vec{S}(\varphi)$ )

$$\begin{cases} d\vec{l}^{(r)} = - r d\theta \vec{n}_\theta \\ d\vec{l}^{(r + dr)} = + (r + dr) d\theta \vec{n}_\theta \end{cases} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} d\vec{l}^{(\theta)} = + dr \vec{n}_r \\ d\vec{l}^{(\theta + d\theta)} = - dr \vec{n}_r \end{cases} \quad (3b)$$

De manière similaire à ce que l'on a fait précédemment lorsque nous avons calculé la divergence, on prend maintenant  $\vec{a}$  constant sur chaque portion du contour  $d\vec{l}$ . Par exemple, sur l'élément de longueur  $d\vec{l}^{(r + dr)}$ , on a

$$[\vec{a}(r, \theta, \varphi)]_{d\vec{l}^{(r + dr)}} = a_r(r + dr, \theta, \varphi) \vec{n}_r + a_\theta(r + dr, \theta, \varphi) \vec{n}_\theta + a_\varphi(r + dr, \theta, \varphi) \vec{n}_\varphi \quad (4)$$

NB : comme avant pour la divergence, on pourrait prendre dans (4)  $a_{r,\theta,\varphi}(r+dr, \theta+d\theta, \varphi)$  mais cela ne changerait, ici encore, rien au résultat final (on écrit un développement de Taylor, donc des termes quadratiques, etc... en  $d\theta$  sont issus de  $\vec{a} \cdot d\vec{l}$ , qui devient linéaires, etc... en  $d\theta$  après division par  $ds^{(\varphi)} = r dr d\theta$ , et donc s'annulent dans la limite  $dr, d\theta \rightarrow 0$ ).

Ainsi, en écrivant les valeurs constantes du champ  $\vec{a}$  sur chacun des 4 éléments de longueur (valeurs qui sont de la forme (4)), on obtient donc de la version infinitésimale du théorème de Stokes (et en utilisant les expressions (3) de chaque élément de longueur)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{ds}^{(\varphi)} &= ds^{(\varphi)} \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_\varphi = \vec{a} \cdot d\vec{l} \\ &= \vec{a} \cdot d\vec{l}^{(r)} + \vec{a} \cdot d\vec{l}^{(\theta+d\theta)} + \vec{a} \cdot d\vec{l}^{(\varphi)} + \vec{a} \cdot d\vec{l}^{(\varphi+r+dr)} \\ &= [a_r(r, \theta, \varphi) - a_r(r, \theta+d\theta, \varphi)] dr \\ &\quad + [a_\theta(r+dr, \theta, \varphi)(r+dr) - a_\theta(r, \theta, \varphi)r] d\theta \\ &= - [a_r(r, \theta+d\theta, \varphi) - a_r(r, \theta, \varphi)] dr + [a_\theta(r+dr, \theta, \varphi)(r+dr) - a_\theta(r, \theta, \varphi)r] d\theta \\ \text{soit, en divisant des deux côtés par } ds^{(\varphi)} = r dr d\theta, \\ \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_\varphi &= [a_\theta(r+dr, \theta, \varphi)(r+dr) - a_\theta(r, \theta, \varphi)r] \frac{1}{r dr} \\ &\quad - [a_r(r, \theta+d\theta, \varphi) - a_r(r, \theta, \varphi)] \frac{1}{r d\theta} \end{aligned}$$

d'où, en prenant la limite de,  $dr, d\theta \rightarrow 0$

$$\vec{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \lim_{dr \rightarrow 0} \frac{a_\theta(r+dr, \theta, \varphi)(r+dr) - a_\theta(r, \theta, \varphi)r}{dr} \right.$$

$$\left. - \lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{a_r(r, \theta+d\theta, \varphi) - a_r(r, \theta, \varphi)}{d\theta} \right\}$$

où l'on reconnaît des dérivées partielles  $\partial/\partial r, \partial/\partial \theta$ .

On a donc montré que

$$\vec{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_\varphi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right]$$

COMPOSANTE DU ROTATIONNEL EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES  
SELON  $\vec{n}_\varphi$

→ on utilise ensuite exactement la même procédure pour obtenir les deux autres composantes, selon  $\vec{n}_r$  et  $\vec{n}_\theta$ ,

de  $\vec{rot} \vec{a}$  :

- i) pour  $\vec{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_r$ , prendre une surface élémentaire  $dS^{(r)}$  à  $r$  constant ;
- ii) pour  $\vec{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_\theta$ , prendre une surface élémentaire  $dS^{(\theta)}$  à  $\theta$  constant .



Exo 5 : on devra faire appel aux théorèmes de Stokes : (5)

Stokes (divergence) : 
$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{u}) \, dV = \oint_{\partial V} ds \, \vec{n} \cdot \vec{u}$$

Stokes (rotationnel) : 
$$\iint_{\Sigma} ds \, \vec{n} \cdot \operatorname{rot}(\vec{u}) = \oint_{\partial \Sigma} d\vec{M} \cdot \vec{u}$$

a) Soit un vecteur  $\vec{u}$  arbitraire, mais fixé. On a donc

$$\vec{u} \cdot \iiint_V dV \operatorname{grad} f = \iiint_V dV \vec{u} \cdot \operatorname{grad} f$$

Exo 3

$$\stackrel{?}{=} \iiint_V dV \left[ \operatorname{div}(f\vec{u}) - \underbrace{f \operatorname{div} \vec{u}}_{=0 \text{ car } \vec{u} \text{ fixé}} \right]$$

$$= \iiint_V dV \operatorname{div}(f\vec{u}) \quad \rightarrow \text{ et on peut maintenant utiliser le théorème de Stokes pour la divergence}$$

soit 
$$\vec{u} \cdot \iiint_V dV \operatorname{grad} f = \oint_{\partial V} ds \, \vec{n} \cdot f\vec{u}$$

et donc

$$\vec{u} \cdot \left[ \iiint_V dV \operatorname{grad} f \right] = \vec{u} \cdot \left[ \oint_{\partial V} ds \, \vec{n} f \right], \quad \forall \vec{u}$$

Le fait que ce résultat soit valable pour tout  $\vec{u}$  nous autorise donc à écrire

$$\iiint_V dV \operatorname{grad} f = \oint_{\partial V} ds \, \vec{n} f$$

b) Soit un vecteur  $\vec{b}$  arbitraire mais fixé, on a

$$\vec{b} \cdot \iiint_V dV \operatorname{rot} \vec{a} = \iiint_V dV \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a}$$

Exo 3

$$= \iiint_V dV \left[ \operatorname{div} (\vec{a} \times \vec{b}) + \underbrace{\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}}_{= \vec{0}} \right]$$

=  $\vec{0}$  puisque  $\vec{b}$  fixé

$$= \iiint_V dV \operatorname{div} (\vec{a} \times \vec{b}) \rightarrow \text{de nouveau, Stokes pour la divergence}$$

soit

$$\vec{b} \cdot \iiint_V dV \operatorname{rot} \vec{a} = \oint_{\partial V} ds \vec{n} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Or le produit mixte est invariant par permutation circulaire, d'où

$$\vec{n} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{n} \times \vec{a})$$

On obtient donc

$$\vec{b} \cdot \left[ \iiint_V dV \operatorname{rot} \vec{a} \right] = \vec{b} \cdot \left[ \oint_{\partial V} ds \vec{n} \times \vec{a} \right], \quad \forall \vec{b}$$

et donc, étant valable pour tout  $\vec{b}$ ,

$$\iiint_V dV \operatorname{rot} \vec{a} = \oint_{\partial V} ds \vec{n} \times \vec{a}$$

c) Soit un vecteur  $\vec{a}$  arbitraire mais fixé. On suit avec l'exo 3 que

$$\operatorname{rot} (f \vec{a}) = \underbrace{f \operatorname{rot} \vec{a}}_{= \vec{0} \text{ car } \vec{a} \text{ fixé}} + \operatorname{grad}(f) \times \vec{a}$$

d'où

$$\text{rot}(\vec{f}(\vec{a})) = \text{grad}(f) \times \vec{a}$$

(52)

On a donc

$$\iint_{\Sigma} ds \vec{n} \cdot \text{rot}(\vec{f}(\vec{a})) = \iint_{\Sigma} ds \vec{n} \cdot (\text{grad}(f) \times \vec{a})$$

soit, en utilisant le théorème de Stokes pour le rotationnel, et l'invariance du produit mixte par permutation circulaire,

$$\oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} \cdot (\vec{f}(\vec{a})) = \iint_{\Sigma} ds \vec{a} \cdot (\vec{n} \times \text{grad} f)$$

et donc

$$\vec{a} \cdot \left[ \oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} f \right] = \vec{a} \cdot \left[ \iint_{\Sigma} ds \vec{n} \times \text{grad} f \right], \quad \forall \vec{a}$$

d'où, étant valide pour tout  $\vec{a}$ ,

$$\iint_{\Sigma} ds \vec{n} \times \text{grad} f = \oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} f \quad (*)$$

d) On se propose de calculer directement les composantes de l'intégrale  $\oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} \times \vec{a}$ , ie

$$\left[ \oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} \times \vec{a} \right]_i = \epsilon_{ijk} \oint_{\partial \Sigma} d\sigma_j a_k$$

d'où, en utilisant le résultat (\*) ci-dessus pour expliciter l'intégrale  $\oint_{\partial \Sigma} d\sigma_j a_k$ ,

$$\left[ \oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} \times \vec{a} \right]_i = \epsilon_{ijk} \left[ \iint_{\Sigma} ds \vec{n} \times \text{grad} a_k \right]_j$$

$$= \epsilon_{ijk} \iint_{\Sigma} ds \left[ \vec{n} \times \text{grad} a_k \right]_j = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} \iint_{\Sigma} ds n_l (\text{grad} a_k)_m$$

d'om

$$\left[ \oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} \times \vec{a} \right]_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} \iint_{\Sigma} ds m_l \partial_m a_k$$

$$= - \epsilon_{jik} \epsilon_{jlm} \iint_{\Sigma} ds m_l \partial_m a_k$$

$$= \iint_{\Sigma} ds \left[ \delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km} \right] m_l \partial_m a_k$$

$$= \iint_{\Sigma} ds \left[ m_k \partial_i a_k - m_i \partial_k a_k \right]$$

et donc

$$\left[ \oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} \times \vec{a} \right]_i = \iint_{\Sigma} ds \left[ m_k (\vec{\text{grad}} a_k)_i - m_i \text{div} \vec{a} \right]$$

d'om

$$\oint_{\partial \Sigma} d\vec{n} \times \vec{a} = \iint_{\Sigma} ds \left[ m_k \vec{\text{grad}} a_k - \vec{m} \text{div} \vec{a} \right]$$



Exo 6 : on montre que le champ des vitesses d'un solide en rotation autour d'un point fixe  $O$  est donné par, au point  $P$  quelconque du solide,

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times \vec{OP} \quad (1)$$

le vecteur  $\vec{\omega}$ , dénotons le

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

dans la base cartésienne, est le vecteur rotation du solide à un instant donné : il est donc en particulier fixé à un instant donné. le vecteur  $\vec{OP}$  repère la position du point  $P$  du solide par rapport à son centre de rotation  $O$ , ie dans le repère cartésien d'origine  $O$ ,

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Insistons sur le fait que l'on travaille à un instant fixé dans tout cet exercice.

1) le vecteur  $\vec{\omega}$  fixe l'axe de rotation du solide. soit donc le point  $O'$  de cet axe tel que

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \quad (4)$$

avec

$$\vec{O'P} \perp \vec{OO'} \quad (5)$$

Puisque  $O$  et  $O'$  sont tous deux des points de l'axe de rotation, on a

$$\vec{OO'} = \alpha \vec{\omega}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (6)$$

En combinant (1) avec (4) et (6), on voit donc que le champ des vitesses au point  $\Omega$  peut s'écrire

$$\vec{v}(\Omega) = \vec{\omega} \times (\alpha \vec{\omega} + \vec{o'\Omega})$$

$$= \alpha \vec{\omega} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{o'\Omega}$$

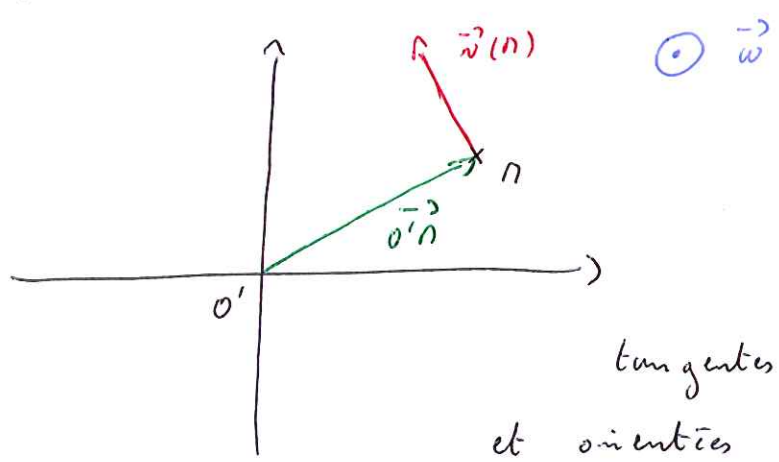
soit

$$\vec{v}(\Omega) = \vec{\omega} \times \vec{o'\Omega} \tag{7}$$

Or, avec (5) et (6) on voit que

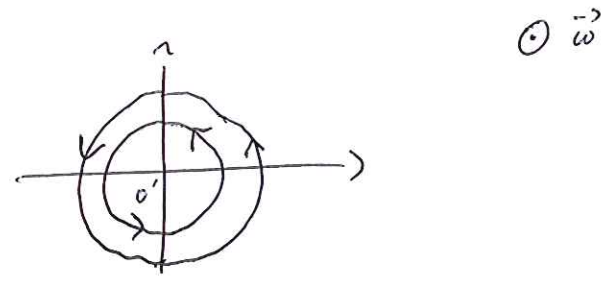
$$\vec{o'\Omega} \perp \vec{\omega} \tag{8}$$

Ainsi, (7) et (8) nous assurent que  $(\vec{\omega}, \vec{o'\Omega}, \vec{v}(\Omega))$  forme un trièdre direct, ce qui nous donne directement l'orientation de  $\vec{v}(\Omega)$ .



Or, les lignes de champ doivent être par définition tangentes à  $\vec{v}(\Omega)$  en tout point  $\Omega$ , et orientées dans le sens de  $\vec{v}(\Omega)$ .

$\Rightarrow$  ici, les lignes de champ sont donc des cercles concentriques (dans le plan  $(\vec{o'\Omega}, \vec{v}(\Omega))$ ) de centre  $O'$  (situé sur l'axe de rotation) et orientées dans le sens de  $\vec{v}(\Omega)$  :



2) i) Calculons d'abord  $\text{div } \vec{v}$ . Puisque par construction

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{on}$$

(62)

$$\text{div } \vec{v} = \text{div} (\vec{\omega} \times \vec{on})$$

On utilise la 3<sup>e</sup> identité de l'exo 3, et on a

$$\text{div } \vec{v} = \text{div} (\vec{\omega} \times \vec{on}) = \vec{on} \cdot \text{rot } \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \text{rot } \vec{on} \quad (9)$$

Puisque  $\vec{\omega}$  est fixé, on a directement  $\text{rot } \vec{\omega} = \vec{0}$ . De plus

$$(\text{rot } \vec{on})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j on_k = \epsilon_{ijk} \partial_j x_k$$

avec

$$\partial_j x_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}$$

d'où

$$(\text{rot } \vec{on})_i = \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \epsilon_{i\cancel{j}\cancel{j}} = 0, \quad \forall i$$

soit  $\text{rot } \vec{on} = \text{rot } \vec{\omega} = \vec{0}$ . On obtient donc de (9)

$$\boxed{\text{div } \vec{v} = 0} \quad (10)$$

ii) Calculons maintenant  $\text{rot } \vec{v} = \text{rot} (\vec{\omega} \times \vec{on})$ . On a d'après la 6<sup>e</sup> identité de l'exo 3

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot} (\vec{\omega} \times \vec{on}) = (\vec{on} \cdot \text{grad}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{on} + \vec{\omega} \text{ div } \vec{on} - \vec{on} \text{ div } \vec{\omega}$$

Puisque  $\text{div } \vec{\omega} = 0$  ( $\vec{\omega}$  fixé) et

$$(\vec{on} \cdot \text{grad}) \vec{\omega} = x_j \partial_j \omega = 0$$

on obtient

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot} (\vec{\omega} \times \vec{on}) = \vec{\omega} \text{ div } \vec{on} - (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{on} \quad (11)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{rot} \vec{v})_i &= w_i \partial_j \omega_j - w_j \partial_j \omega_i \\
 &= w_i \frac{\partial x_j}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 3w_i - w_j \delta_{ij} = 3w_i - w_i
 \end{aligned}$$

soit

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_i = 2w_i, \quad \forall i$$

On a donc

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}} \tag{12}$$

3) Calculons enfin  $\Delta \vec{v}$ . On a d'après la 5<sup>e</sup> identité de l'enc 3

$$\Delta \vec{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}$$

soit avec les résultats (10) et (12) ci-dessus

$$\Delta \vec{v} = \operatorname{grad} 0 - \operatorname{rot} 2\vec{\omega} = -\operatorname{rot} 2\vec{\omega}$$

et donc, puisque  $\vec{\omega}$  est linéaire (et donc  $\operatorname{rot} 2\vec{\omega} = \vec{0}$ ),

$$\boxed{\Delta \vec{v} = \vec{0}} \tag{13}$$

Exo 7 : Soient les champs de vecteurs

$$\vec{a} = -hx \vec{u}_x + hy \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{b} = \frac{c}{2\pi\rho} \vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{c} = \frac{c}{2\pi\rho} \vec{u}_\rho$$

On supposera par exemple  $h > 0$  et  $c > 0$

1)  $\vec{a}$  défini partout dans le plan, mais  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  pas définis à l'origine (ie pour  $\rho = 0$ )

2) Lignes de champ pour  $\vec{a}$  : l'élément de longueur en

coordonnées cartésiennes est  $d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$ . Un élément de longueur infinitésimal  $d\vec{r}$  de ligne de champ doit être tangent à  $\vec{a}$ , soit

$$d\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{pmatrix} -a_y dz \\ a_x dz \\ a_y dx - a_x dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} dz = 0 \\ a_y dx = a_x dy \end{cases}$$

On en tire donc, puisque  $a_x = -hx$  et  $a_y = hy$

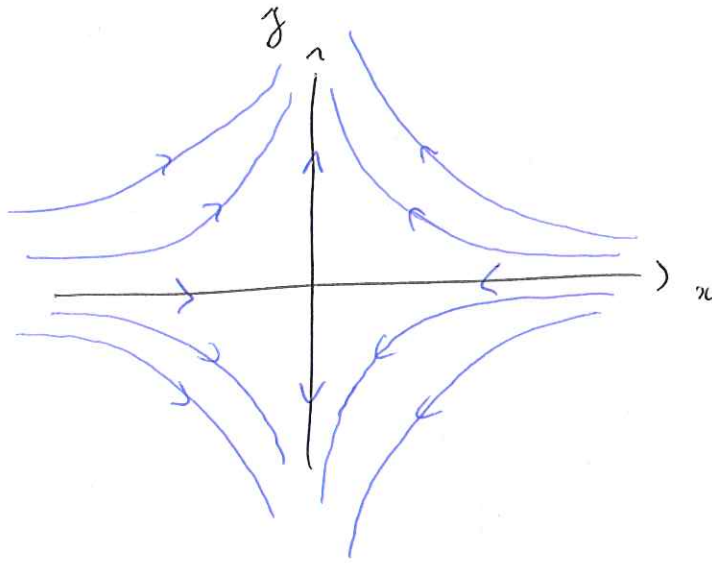
$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad x, y \neq 0$$

les lignes de champ de  $\vec{a}$  seront donc, pour  $x, y \neq 0$ , des hyperboles de la forme

$$y = \frac{1}{x}$$

l'orientation des lignes de champ est fixée par le sens du vecteur  $\vec{u}$  au point  $(x, y)$ .

Par exemple, pour  $y = 0$ , on a  $\vec{u} = -kx \vec{u}_x$ , et donc les lignes de champ seront le long de l'axe  $(Ox)$ . Or pour  $x > 0$ ,  $\vec{u}$  est dirigé vers l'origine; ce sera donc la même chose pour les lignes de champ. De même pour  $x < 0$ , puisque dans ce cas  $u_x = -kx = +k|x|$ .



Lignes de champ pour  $\vec{b}$ : le champ  $\vec{b}$  est exprimé en coordonnées cylindriques. l'élément de longueur  $d\vec{r}$  est donc ici

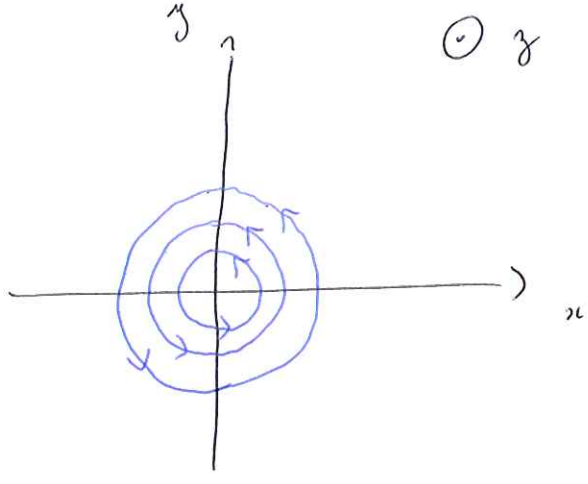
on doit donc résoudre

$$d\vec{r} = dp \vec{u}_p + p d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$d\vec{r} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{pmatrix} dp \\ p d\theta \\ dz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b_\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{pmatrix} b_\theta dz = 0 \\ 0 \\ b_\theta dp = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où directement  $dp = dz = 0$

Ainsi, les lignes de champ de  $\vec{b}$  doivent être selon  $\vec{u}_\theta$  uniquement, et sont donc des cercles concentriques dans le sens direct.



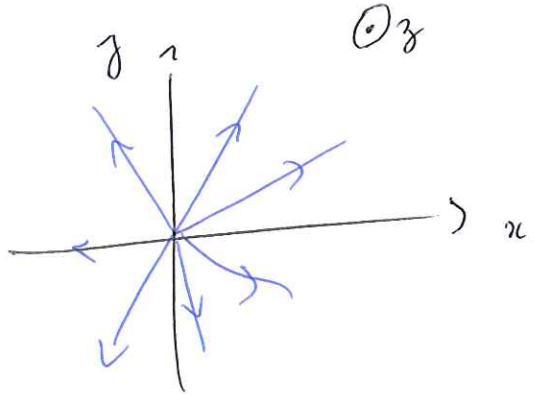
Lignes de champ pour  $\vec{c}$  : on doit cette fois avoir

$$d\vec{r} \times \vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ c_y dz \\ c_x dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où directement

$$dz = dx = 0$$

Ainsi, les lignes de champ de  $\vec{c}$  doivent être selon  $\vec{r}_p$  uniquement, et sont donc des rayons émanant de l'origine.



3) Pour le champ  $\vec{a}$  :  $div \vec{a} = \partial_i a_i = \partial_x a_x + \partial_y a_y$   
 $= \partial_x (-kx) + \partial_y (ky) = -k + k = 0$

$$rot \vec{a} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_y a_y \\ \partial_x a_x \\ \partial_x a_y - \partial_y a_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où  $div \vec{a} = 0$  et  $rot \vec{a} = \vec{0}$

Pour le champ  $\vec{b}$  : on rappelle les opérateurs div et rot en coordonnées cylindriques : pour un champ  $\vec{F} = F_\rho \vec{u}_\rho + F_\theta \vec{u}_\theta + F_z \vec{u}_z$

on a

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

et

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left( \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\theta) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

On a donc, avec  $\vec{b} = b_\theta \vec{u}_\theta$ ,

$$\text{div } \vec{b} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{c}{2u\rho} \right) = 0$$

$$\text{rot } \vec{b} = - \frac{\partial b_\theta}{\partial z} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho b_\theta) \right) \vec{u}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{c}{2u\rho} \right) \vec{u}_z = \vec{0}$$

d'où  $\text{div } \vec{b} = 0$  et  $\text{rot } \vec{b} = \vec{0}$

Pour le champ  $\vec{c}$  : puisque  $\vec{c} = c_\rho \vec{u}_\rho$  on a

$$\text{div } \vec{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho c_\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{c}{2u\rho} \right) = 0$$

$$\text{rot } \vec{c} = \frac{\partial c_\rho}{\partial z} \vec{u}_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \theta} = \vec{0}$$

d'où  $\text{div } \vec{c} = 0$  et  $\text{rot } \vec{c} = \vec{0}$

⚠️ puisque  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  ne sont pas définis à l'origine, de même  $\text{div } \vec{b}$ , ...,  $\text{rot } \vec{c}$  ne sont pas non plus définis à l'origine. les résultats ci-dessus pour  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  ne sont donc pas valables à l'origine



4) Par le théorème de Stokes pour le rotationnel, pour tout contour fermé  $\mathcal{C}$  définissant une surface  $S$ , la circulation de  $\vec{u}$  le long de  $\mathcal{C}$  est donnée par

(73)

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{u} = \iint_S ds \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{u}$$

Or on sait avec la question précédente que  $\text{rot} \vec{u} = \vec{0}$  dans tout le plan, soit

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \cdot \vec{u} = 0 \quad \forall \mathcal{C} \text{ contour fermé}$$

$\Rightarrow \vec{u}$  est à circulation conservative

De plus, par le théorème de Stokes pour la divergence, pour toute surface fermée  $S$  délimitant un volume  $V$ , le flux de  $\vec{u}$  à travers  $S$  est donné par

$$\oint_S ds \vec{n} \cdot \vec{u} = \iiint_V dV \text{div} \vec{u}$$

Or on a vu que  $\text{div} \vec{u} = 0$  dans tout l'espace, d'où

$$\oint_S ds \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \forall S \text{ surface fermée}$$

$\Rightarrow \vec{u}$  est à flux conservatif

On veut maintenant déterminer les potentiels scalaire et vect associés à  $\vec{u}$ . En effet, puisque  $\text{div} \vec{u} = 0$ ,  $\vec{u}$  dérive d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$ , ie on peut exprimer  $\vec{u}$  comme

$$\vec{u} = \text{rot} \vec{A}$$

De plus, puisque  $\text{rot} \vec{u} = \vec{0}$ ,  $\vec{u}$  dérive d'un potentiel scalaire  $A$ , ie on peut exprimer  $\vec{u}$  comme

$$\vec{u} = - \text{grad} A$$

( le signe  $\ominus$  étant juste une convention ).

→ Potentiel scalaire A : on veut donc une fonction A telle que ( on utilise grad en coordonnées cartésiennes )

$$\vec{u} = - h x \vec{e}_x + h y \vec{e}_y = - \text{grad} A = - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial A}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_z$$

et on doit donc avoir

$$\frac{\partial A}{\partial x} = h x ; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = h y ; \quad \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

Ainsi, le potentiel scalaire A est de la forme

$$A = \frac{h}{2} (x^2 - y^2 + \alpha) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour simplifier, on peut fixer  $\alpha$  à zéro, soit

$$\boxed{A = A(x, y) = \frac{h}{2} (x^2 - y^2)}$$

→ Potentiel vecteur  $\vec{A}$  : on veut maintenant un champ  $\vec{A}$ , tel que  $\vec{u} = \text{rot} \vec{A}$ , ie

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

$$- h x \vec{e}_x + h y \vec{e}_y = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

et on doit donc avoir

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = - h x ; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = h y ; \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Pour simplifier, cherchons par exemple un potentiel vecteur

$$\text{tel que} \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

les équations (1) nous donnent dans ce cas

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = -hxy \Rightarrow A_z = -hxy + f(x, y)$$

(3a)

où  $f$  est une fonction arbitraire de  $x$  et  $y$ , et

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -hy \Rightarrow A_z = -hxy + g(y, z)$$

(3b)

où  $g$  est une fonction arbitraire de  $y$  et  $z$ . En combinant (3a) et (3b) on trouve donc

(4)

$$A_z = -hxy + f(z)$$

où  $f$  est une fonction arbitraire de  $z$ . On utilise maintenant (2) pour écrire

$$\begin{cases} A_x = \alpha + f(x, y) \\ A_y = \beta + g(x, y) \end{cases}$$

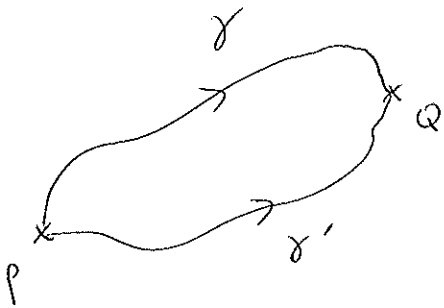
et enfin de la dernière équation de (1), ie  $\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$ , on voit que l'on peut par exemple choisir les fonctions  $f(x, y)$  et  $g(x, y)$  comme constantes. On obtient donc une classe de potentiels vecteurs

$$\vec{A} = \alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_y + [-hxy + f(z)] \vec{u}_z$$

où  $\alpha, \beta$  sont des scalaires et  $f$  une fonction arbitraire. Pour simplifier, on peut donc considérer le potentiel vecteur

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y) = -hxy \vec{u}_z$$

5) a) Soient  $P$  et  $Q$  deux points distincts de l'espace.  
 Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux chemins homotopes relativement à  $P$   
 et  $Q$ . Le contour  $\varepsilon = \gamma \cup \{-\gamma'\}$  est donc un contour  
 fermé.



Supposons que le contour fermé  $\varepsilon$  ne contienne pas  
 l'origine. Dans le cas, le champ  $\vec{l}$  est parfaitement  
 défini sur le contour  $\varepsilon$  ainsi que sur l'ensemble de la  
 surface  $S$  délimitée par  $\varepsilon$ . Ceci est par suite également  
 vrai pour  $\vec{l}$ . Or on a vu précédemment que  $\text{rot } \vec{l} = \vec{0}$   
 partout où  $\vec{l}$  est défini. En appliquant le théorème de  
 Stokes pour le rotationnel on a

$$\iint ds \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{l} = \oint_{\varepsilon} d\vec{l} \cdot \vec{l}$$

soit donc avec  $\text{rot } \vec{l} = \vec{0}$ ,

$$\oint_{\varepsilon} d\vec{l} \cdot \vec{l} = 0$$

Or par définition  $\varepsilon = \gamma \cup \{-\gamma'\}$  - d'où

$$\oint_{\varepsilon} d\vec{l} \cdot \vec{l} = \int_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{l} + \int_{-\gamma'} d\vec{l} \cdot \vec{l} = \int_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{l} - \int_{\gamma'} d\vec{l} \cdot \vec{l} = 0$$

et donc

$$\int_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{l} = \int_{\gamma'} d\vec{l} \cdot \vec{l}$$

b) Soit  $\gamma$  un contour fermé. Soit  $dl$  l'élément de longueur infinitésimal tangent à  $\gamma$  en tout point, on a en coordonnées cylindriques  $dl = d\rho \vec{n}_\rho + \rho d\theta \vec{n}_\theta + dz \vec{n}_z$ , soit donc

$$dl \cdot \vec{l} = (d\rho \vec{n}_\rho + \rho d\theta \vec{n}_\theta + dz \vec{n}_z) \cdot \frac{c}{2\pi\rho} \vec{n}_\theta = \frac{c}{2\pi} d\theta \quad (7_5)$$

Puisque  $\gamma$  est un contour fermé, l'angle polaire varie entre 0 et  $2\pi$  si  $\gamma$  inclut l'origine. Supposons donc que  $\gamma$  soit un contour fermé dans le plan  $(x, y)$  qui inclut l'origine, on a donc

$$\oint_{\gamma} dl \cdot \vec{l} = \frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{c}{2\pi} (2\pi - 0)$$

d'où on tire donc le résultat

$$\boxed{\oint_{\gamma} dl \cdot \vec{l} = c \neq 0}$$

dans le cas où  $\gamma$  est un contour fermé incluant l'origine. Ainsi, le champ  $\vec{l}$  n'est pas à circulation conservatrice. (c) ceci n'est pas en contradiction avec la valeur de  $\oint \vec{l}$  déterminée précédemment. En effet,  $\oint \vec{l}$  n'est pas défini dans tout l'espace ( $\vec{l}$  ne l'étant pas) :  $\oint \vec{l}$  n'est pas défini à l'origine, et c'est précisément la circulation de  $\vec{l}$  le long de n'importe quel contour fermé incluant l'origine qui n'est pas nulle. Pour tout contour fermé  $\gamma'$  n'incluant pas l'origine, on a bien  $\oint_{\gamma'} dl \cdot \vec{l} = 0$  comme conséquence directe de  $\text{rot } \vec{l} = \vec{0}$  et du théorème de

Stokes qui peuvent dans ce cas être appliqués sans difficulté,  $\vec{l}$  et  $\text{rot } \vec{l}$  étant parfaitement définis sur et à l'intérieur de  $e'$ .

c) Essayons maintenant de trouver un potentiel scalaire  $\phi$  pour le champ  $\vec{l}$ , ie tel que

$$\vec{l} = - \text{grad } \phi$$

On rappelle le gradient en cylindriques -

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{m}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{m}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{m}_z$$

le potentiel scalaire  $\phi$  doit donc satisfaire

$$\frac{c}{2\pi\rho} \vec{m}_\theta = - \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \vec{m}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{m}_\theta - \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{m}_z$$

soit

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \frac{c}{2\pi} \rho$$

On voit donc directement qu'une classe de potentiels scalaire pour  $\vec{l}$  serait

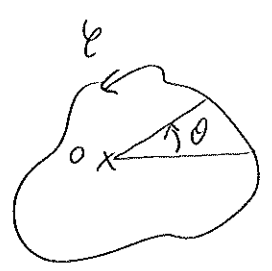
$$\phi = - \frac{c}{2\pi} \theta + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

soit, en faisant eg  $\alpha = 0$ ,

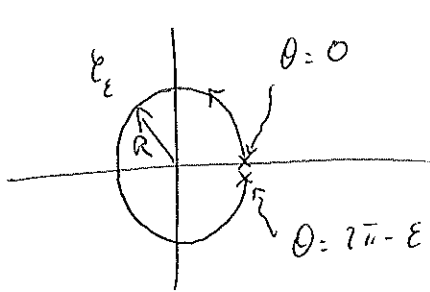
$$\boxed{\phi = \phi(\theta) = - \frac{c}{2\pi} \theta}$$

l'angle polaire  $\theta$  n'étant pas défini à l'origine, on voit donc directement que, comme  $\vec{l}$ , le potentiel scalaire  $\phi$  n'est pas non plus défini à l'origine.

La singularité du potentiel  $\phi$  provient de sa dépendance en l'angle  $\theta$  : en effet, la valeur de  $\phi$  ne revient pas à sa valeur initiale lorsque l'on parcourt un contour fermé  $\gamma$  entourant l'origine. Plus précisément, le point initial de  $\gamma$  correspondant à l'angle  $\theta = 0$ , et donc une valeur  $\phi(0) = 0$ , tandis que le point final de  $\gamma$  correspond à l'angle  $\theta = 2\pi$ , et donc une valeur  $\phi(2\pi) = -c$ .



Rediscuter la question (il suffit d'utiliser le théorème fondamental de l'analyse). Ainsi, on se limite à calculer la circulation de  $\vec{l}$  le long d'un cercle  $\rho = R$  en utilisant le potentiel scalaire  $\phi$  ci-dessus. Soit donc  $\gamma_\epsilon$  le quasi-cercle de rayon  $R$ , joignant le point  $\theta = 0$  au point  $\theta = 2\pi - \epsilon$  :



$$\gamma_\epsilon = \left\{ \vec{a} \mid \vec{a} = R \vec{a}_\rho, \theta \in [0, 2\pi - \epsilon] \right\}$$

Ainsi,  $\gamma_\epsilon$  n'est pas un contour fermé. Le champ  $\vec{l}$  et le potentiel scalaire  $\phi$  étant parfaitement définis sur  $\gamma_\epsilon$ , on peut écrire

$$\int_{\gamma_\epsilon} d\vec{l} \cdot \vec{l} = - \int_{\gamma_\epsilon} d\vec{l} \cdot \text{grad } \phi$$

soit, puisque  $d\vec{l} = R d\theta \vec{a}_\theta$ , et  $\text{grad } \phi = \frac{1}{R} \frac{d\phi}{d\theta} \vec{a}_\theta$ , sur  $\gamma_\epsilon$ ,

$$\int_{\gamma_\epsilon} d\vec{l} \cdot \vec{l} = - \int_0^{2\pi - \epsilon} d\theta R \frac{1}{R} \frac{d\phi}{d\theta} = - [\phi(\theta)]_0^{2\pi - \epsilon} = \phi(0) - \phi(2\pi - \epsilon)$$

soit avec  $\phi(0) = -c\theta/2\pi$ ,

$$\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \vec{dl} \cdot \vec{l} = + \frac{c(2\pi - \varepsilon)}{2\pi} = c - \frac{c}{2\pi} \varepsilon$$

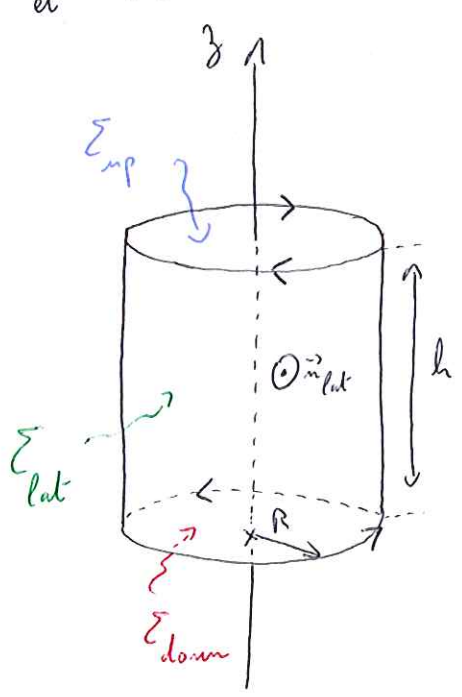
le circuit de  $\vec{l}$  le long du cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $R$  est donc la limite, pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de la circuit de  $\vec{l}$  le long de  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , d'où

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{dl} \cdot \vec{l} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \vec{dl} \cdot \vec{l} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( c - \frac{c}{2\pi} \varepsilon \right)$$

soit 
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{dl} \cdot \vec{l} = c$$

ce qui est parfaitement en accord avec le résultat que l'on avait obtenu en 5) b).

b) Soit  $\Sigma$  une surface cylindrique d'axe  $(Oz)$ , rayon  $R$  et hauteur  $h$



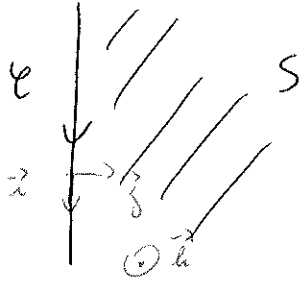
a) On divise la surface fermée  $\Sigma$  en trois surfaces ouvertes :

- i)  $\Sigma_{top} \equiv$  surface circulaire en haut du cylindre
- ii)  $\Sigma_{bottom} \equiv$  surface circulaire en bas du cylindre
- iii)  $\Sigma_{lat} \equiv$  surface cylindrique latérale

On oriente la surface  $\Sigma_{lat}$  vers l'extérieur de la surface fermée. Ceci fixe donc sans ambiguïté l'orientation.



correspondante du bord  $\partial E$ , qui est combinée des deux  
 ces des déterminent les surfaces  $E_{up}$  et  $E_{down}$ . On  
 rappelle que pour un contour orienté  $\mathcal{C}$  déterminent  
 une surface  $S$ , l'orientation de  $\mathcal{C}$  et de  $S$  est  $(7_7)$   
 liée comme suit :



- i) on considère un vecteur  $\vec{z}$  dans le sens de  $\mathcal{C}$
- ii) on construit ensuite un vecteur  $\vec{y}$   $\perp$  à  $\vec{z}$  orienté vers l'intérieur de la surface

iii) le vecteur  $\vec{h}$  définit l'orientation de la surface  $S$  est tel que  $(\vec{z}, \vec{y}, \vec{h})$  forme un trièdre direct.

Ecrivons donc maintenant les vecteurs infinitésimaux

$$d\vec{S} \equiv ds \vec{n}$$

définissent les différentes surfaces ouvertes constituant la surface fermée  $E$ .

→ Pour  $E_{lat}$  : par construction, un élément de surface de  $E_{lat}$  est orienté vers l'intérieur du cylindre, ie selon  $+\vec{n}_p$ . Or, les points de  $E_{lat}$  sont à même distance de l'axe ( $oz$ ) (ie  $\rho = R = cte$ ), mais les angles  $\theta$  et hauteurs  $z$  varient. Le module  $ds_{lat}$  d'un élément de surface de  $E_{lat}$  vaut donc  $ds_{lat} = R d\theta dz$

Ainsi, on a

$$d\vec{S}_{lat} = ds_{lat} \vec{n}_{lat} = R d\theta dz \vec{n}_p$$

→ Pour  $\Sigma_{up}$  : pour rester cohérent avec l'orientation de  $\Sigma_{tot}$  et donc l'orientation de  $d\Sigma$ ,  $\Sigma_{up}$  doit donc être orientée selon  $-\vec{n}_z$ . De plus, les points de  $\Sigma_{up}$  sont à même hauteur (ie  $z = h =cte$ ), mais les distances  $\rho$  à l'axe  $z$  et les angles  $\theta$  varient. Le module  $dS_{up}$  d'un élément de surface de  $\Sigma_{up}$  vaut donc  $dS_{up} = \rho d\rho d\theta$ .  
 Ainsi, on a

$$d\vec{S}_{up} = dS_{up} \vec{n}_{up} = -\rho d\rho d\theta \vec{n}_z$$

→ Pour  $\Sigma_{down}$  : de manière similaire à  $\Sigma_{up}$ , on obtient directement

$$d\vec{S}_{down} = dS_{down} \vec{n}_{down} = \rho d\rho d\theta \vec{n}_z$$

b) Soit  $\Phi$  le flux de  $\vec{c}$  au travers de  $\Sigma$  orientée, on a

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} d\Sigma \vec{n} \cdot \vec{c}$$

$$\Sigma = \Sigma_{up} \cup \Sigma_{down} \cup \Sigma_{lat}$$

soit, avec notre décomposition

$$\Phi = \iint_{\Sigma_{down}} d\vec{S}_{down} \cdot \vec{c} + \iint_{\Sigma_{up}} d\vec{S}_{up} \cdot \vec{c} + \iint_{\Sigma_{lat}} d\vec{S}_{lat} \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{\iint_{\Sigma_{down}} \rho d\rho d\theta \vec{n}_z \cdot \frac{c}{2\pi\rho} \vec{n}_e}_{=0} + \underbrace{\iint_{\Sigma_{up}} \rho d\rho d\theta \vec{n}_z \cdot \frac{c}{2\pi\rho} \vec{n}_p}_{=0} + \iint_{\Sigma_{lat}} R d\theta dz \vec{n}_e \cdot \frac{c}{2\pi\rho} \vec{n}_e
 \end{aligned}$$

soit, puisque  $\rho = R$  sur  $\Sigma_{lat}$ ,

$$\underline{\Phi} = \cancel{R} \frac{c}{2\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{c}{2\pi} (2\pi - 0) (h - 0)$$

(78)

soit donc

$$\underline{\Phi} = c h$$

c) Soient maintenant deux champs  $\vec{C}$  et  $\vec{C}'$  définis par

$$\vec{C} = - \frac{c z}{2\pi \rho} \vec{m}_\theta ; \quad \vec{C}' = \frac{c \theta}{2\pi} \vec{m}_z$$

En utilisant de nouveau le rot en cylindriques, on a

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{C} &= - \frac{\partial c_\theta}{\partial z} \vec{m}_\rho + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho c_\theta) \right) \vec{m}_z \\ &= \frac{c}{2\pi \rho} \vec{m}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( -\cancel{R} \frac{c z}{2\pi \cancel{R}} \right) \vec{m}_z = \frac{c}{2\pi \rho} \vec{m}_\rho \end{aligned}$$

et

$$\vec{\text{rot}} \vec{C}' = \frac{1}{\rho} \frac{\partial c'_z}{\partial \theta} \vec{m}_\rho - \frac{\partial c'_\theta}{\partial \rho} \vec{m}_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{c}{2\pi} \vec{m}_\rho$$

soit donc

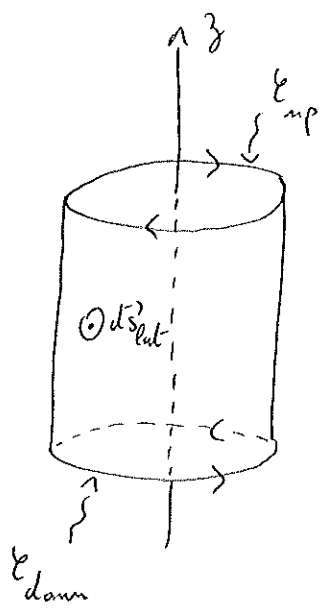
$$\vec{\text{rot}} \vec{C} = \vec{\text{rot}} \vec{C}' = \frac{c}{2\pi \rho} \vec{m}_\rho = \vec{e}$$

le champ  $\vec{C}'$  possède exactement la même dépendance en  $\theta$  que le potentiel scalaire  $\phi$  de  $\vec{e}$ , et présente donc le même comportement singulier que  $\phi$  (cf question 5)c). Cette difficulté n'existe pas pour  $\vec{C}$ , qui peut donc être vu comme un véritable potentiel vectoriel pour  $\vec{e}$  (dans son domaine de définition bien sûr).  
On veut maintenant recalculer le flux de  $\underline{\Phi}$  à partir du

théorème de Stokes et des potentiels vecteurs  $\vec{c}$  et  $\vec{c}'$

→ A partir de  $\vec{c}$  : soit  $\mathcal{E}_{np}$  ( $\mathcal{E}_{dom}$ ) le cercle délimitant

le bord supérieur (inférieur) de la surface latérale  $\mathcal{E}_{lat}$



Calculons la circulation de  $\vec{c}$  autour de  $\mathcal{E}_{dom}$  et  $\mathcal{E}_{np}$  :

$$\oint_{\mathcal{E}_{dom}} d\vec{l} \cdot \vec{c} = - \int_{\mathcal{E}_{dom}} R d\theta \vec{n}_\theta \cdot \frac{c \times 0}{2\pi R} \vec{n}_\theta = 0$$

et

$$\oint_{\mathcal{E}_{np}} d\vec{l} \cdot \vec{c} = - \int_{\mathcal{E}_{np}} R d\theta \vec{n}_\theta \cdot \frac{c h}{2\pi R} \vec{n}_\theta$$

soit, puisque  $\mathcal{E}_{np}$  est orienté en sens horaire,

$$\oint_{\mathcal{E}_{np}} d\vec{l} \cdot \vec{c} = - \frac{c h}{2\pi} \int_{2\pi}^0 d\theta = c h$$

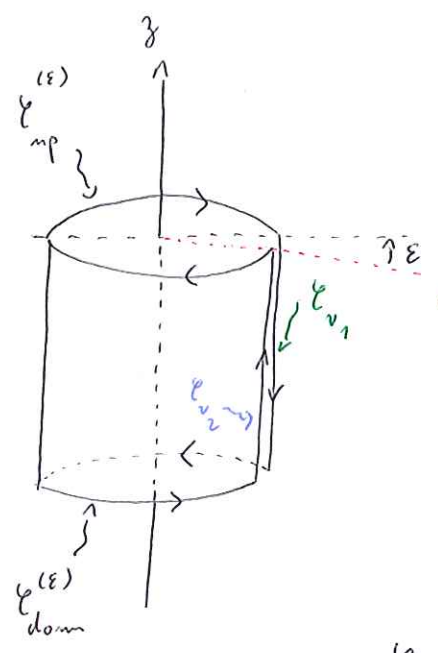
On en suit (cf question 6)b) que  $\vec{\Phi} = \iint_{\mathcal{E}_{lat}} d\vec{S}_{lat} \cdot \vec{c}$ , soit donc en utilisant le théorème de Stokes pour le rotatiomnel et le fait que  $\vec{c} = \text{rot } \vec{c}'$  sur  $\mathcal{E}_{lat}$ ,

$$\vec{\Phi} = \iint_{\mathcal{E}_{lat}} d\vec{S}_{lat} \cdot \text{rot } \vec{c}' = \oint_{\mathcal{E}_{dom}} d\vec{l} \cdot \vec{c}' + \oint_{\mathcal{E}_{np}} d\vec{l} \cdot \vec{c}' = c h$$

ce qui est en parfait accord avec le résultat trouvé en 6)b).

→ A partir de  $\vec{c}'$  : compte tenu des comportements singuliers de  $\vec{c}'$ , on doit être ici un peu plus attentif pour bien calculer la circulation de  $\vec{c}'$ . Ainsi, on ne

considère par directement la surface cylindrique  $\Sigma_{\text{ext}}$ , mais plutôt la quasi surface cylindrique  $\Sigma_{\text{ext}}^{(\varepsilon)}$  définie pour des angles polaires  $\theta \in [0, 2\pi - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ . 73



On dénote  $\Sigma_{np}^{(\varepsilon)}$  le quasi-cercle supérieur, et  $\Sigma_{down}^{(\varepsilon)}$  le quasi-cercle inférieur. On a  $\Sigma_{v_1}$  et  $\Sigma_{v_2}$  deux lignes verticales, pour lesquelles on a respectivement  $\theta = 0$  et  $\theta = 2\pi - \varepsilon$ . On a alors le

contour fermé  $\mathcal{C}_\varepsilon$  défini par

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \Sigma_{np}^{(\varepsilon)} \cup \Sigma_{v_1} \cup \Sigma_{down}^{(\varepsilon)} \cup \Sigma_{v_2}$$

La circulation de  $\vec{c}'$  autour de  $\mathcal{C}_\varepsilon$  est donc

$$\oint_{\mathcal{C}_\varepsilon} d\vec{l} \cdot \vec{c}' = \int_{\Sigma_{np}^{(\varepsilon)}} d\vec{l} \cdot \vec{c}' + \int_{\Sigma_{down}^{(\varepsilon)}} d\vec{l} \cdot \vec{c}' + \int_{\Sigma_{v_1}} d\vec{l} \cdot \vec{c}' + \int_{\Sigma_{v_2}} d\vec{l} \cdot \vec{c}'$$

$$= \int_{\Sigma_{np}^{(\varepsilon)}} R d\theta \vec{n}_\theta \cdot \frac{c\theta}{2\pi} \vec{n}_3 + \int_{\Sigma_{down}^{(\varepsilon)}} R d\theta \vec{n}_\theta \cdot \frac{c\theta}{2\pi} \vec{n}_3 = 0$$

$$+ \int_{\Sigma_{v_1}} dz \vec{n}_3 \cdot \frac{c \times 0}{2\pi} \vec{n}_3 + \int_{\Sigma_{v_2}} dz \vec{n}_3 \cdot \frac{c(2\pi - \varepsilon)}{2\pi} \vec{n}_3 = \frac{c(2\pi - \varepsilon)}{2\pi} \int_0^h dz$$

soit donc

$$\oint_{\mathcal{C}_\varepsilon} d\vec{l} \cdot \vec{c}' = \frac{c h}{2\pi} (2\pi - \varepsilon)$$

On a donc cette fois

$$\begin{aligned}\underline{\Phi} &= \iint_{\Sigma_{\text{ext}}} d\vec{s}_{\text{ext}} \cdot \vec{c} = \iint_{\Sigma_{\text{ext}}} d\vec{s}_{\text{ext}} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{c}' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Sigma_{\varepsilon}} d\vec{l}' \cdot \vec{c}' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{ch}{2\pi} (2\pi - \varepsilon)\end{aligned}$$

et donc

$$\underline{\Phi} = ch$$

ce qui est à nouveau en parfait accord avec le résultat trouvé en 6) b)

Exo 8 : soit  $O$  un point fixe de l'espace, on considère le champ

$$\vec{a}(P) = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|^3}$$

soit, en coordonnées sphériques où  $\vec{OP} = r\vec{m}_r$ ,

$$\vec{a}(P) = \frac{\vec{m}_r}{r^2}$$

1) a) Soit  $S$  une sphère de centre  $O$  et rayon  $R$ . Un élément de surface infinitésimal  $d\vec{S} = dS\vec{m}_r$  de la sphère  $S$  est donc donné, en coordonnées sphériques, par

$$d\vec{S} = dS\vec{m}_r = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{m}_r$$

Le flux de  $\vec{a}$  à travers  $S$  est donc donné par

$$\begin{aligned} \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{a} &= \oint_S R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{m}_r \cdot \frac{\vec{m}_r}{R^2} \\ &= \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi [\cos\theta]_0^\pi = -2\pi(-1-1) \end{aligned}$$

soit donc

$$\boxed{\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{a} = 4\pi}$$

b) on rappelle l'opérateur divergence en sphériques : pour un champ  $\vec{F} = F_r \vec{m}_r + F_\theta \vec{m}_\theta + F_\varphi \vec{m}_\varphi$  on a

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

soit donc

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

ie

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{a} = 0}$$

c) Pour qu'un champ soit à flux conservatif, il faut que son flux à travers toute surface fermée soit nul. Or, on a vu en 1)a) que pour une sphère  $S$ , le flux de  $\vec{a}$  à travers  $S$  est non nul. Le champ  $\vec{a}$  n'est donc pas à flux conservatif.

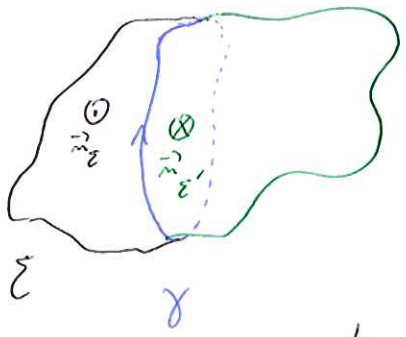
Ceci n'est, ici encore, pas en contradiction avec le résultat précédent  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ . En effet, de manière similaire avec l'exercice 7, le champ  $\vec{a} = \vec{r}/r^2$  n'est pas défini à l'origine, et il en est donc de même avec  $\operatorname{div} \vec{a}$ . Ainsi, le théorème de Stokes pour la divergence ne peut pas s'appliquer comme tel pour un volume incluant l'origine.

2) Soit  $\gamma$  un contour orienté fermé ne passant pas par l'origine  $O$ . On définit l'angle solide  $\Omega_\gamma$  de  $\gamma$  par rapport à  $O$  comme étant le flux de  $\vec{a}$  à travers n'importe quelle surface  $\Sigma$  ne passant pas par  $O$ , s'appuyant sur  $\gamma$  et étant orientée par  $\gamma$ , ie

$$\Omega_\gamma = \iint_\Sigma d\vec{s} \cdot \vec{a} = \iint_\Sigma d\vec{s} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$$



a) Soit donc  $\gamma$  un contour fermé ne passant pas par  $O$ . Soient deux surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  s'appuyant sur  $\gamma$ , et pouvant être déformées continûment l'une en l'autre de telle manière qu'aucune surface intermédiaire ne contienne  $O$ . On peut donc construire une surface fermée  $S$



$\Sigma'$  donc construire une surface fermée  $S$  donnée par

$$S = \Sigma \cup \Sigma'$$

(82)

qui définit un volume  $V$  qui, par construction, ne contient pas l'origine  $O$ . Ainsi,  $\vec{u}$  est parfaitement bien défini sur  $S$ , et  $\text{div } \vec{u}$  est bien défini dans le volume  $V$ , de telle manière que le théorème de Stokes pour la divergence s'applique directement et on a

$$\iiint_V dV \text{div } \vec{u} = \oiint_S d\vec{s} \cdot \vec{u}$$

soit, en utilisant (cf 1) b)) le fait que  $\text{div } \vec{u} = 0$ ,

$$\oiint_S d\vec{s} \cdot \vec{u} = 0$$

Or, on a

$$\oiint_S d\vec{s} \cdot \vec{u} = \iint_{\Sigma} ds \vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{u} - \iint_{\Sigma'} ds \vec{n}_{\Sigma'} \cdot \vec{u}$$

où le signe  $\ominus$  provient du fait que  $\Sigma'$  est orientée vers l'intérieur du volume (tandis que  $\Sigma$  l'est vers l'extérieur). On en tire donc directement

$$\iint_{\Sigma} ds \vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{u} = \iint_{\Sigma'} ds \vec{n}_{\Sigma'} \cdot \vec{u}$$

Ainsi, l'angle solide  $\Omega_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} ds \vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{u}$  calculé en utilisant la surface  $\Sigma$  est le même que l'angle solide  $\Omega_{\Sigma'} = \iint_{\Sigma'} ds \vec{n}_{\Sigma'} \cdot \vec{u}$  calculé en utilisant la surface  $\Sigma'$ .

Méthode alternative: en utilisant le théorème de Stokes pour le rotationnel. Cherchons donc tout d'abord un potentiel vecteur  $\vec{A}$  pour le champ  $\vec{u}$ , ie tel que

$$\vec{u} = \text{rot } \vec{A}$$

En coordonnées sphériques, on a à priori  $\vec{A} = A_r \vec{m}_r + A_{\theta} \vec{m}_{\theta} + A_{\varphi} \vec{m}_{\varphi}$ , soit (avec  $\text{rot}$  en coordonnées sphériques)

$$\vec{u} = \frac{1}{r^2} \vec{m}_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_{\varphi}) - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} \right] \vec{m}_r \quad (1)$$

$$+ \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) \right] \vec{m}_{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{m}_{\varphi}$$

Notons tout d'abord que par construction  $\vec{A} \perp \vec{u}$ , ce qui nous donne directement

$$A_r = 0$$

On réécrit donc (1) en vue de (2), et

$$\frac{1}{r^2} \vec{m}_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_{\varphi}) - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} \right] \vec{m}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) \vec{m}_{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) \vec{m}_{\varphi}$$

soit donc

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) A_{\varphi}) - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{r^2}; \quad \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) = 0 \quad (3)$$

Pour simplifier, cherchons par exemple un potentiel vecteur tel que

$$A_\varphi = 0 \quad (4)$$

ce qui satisfait automatiquement la dernière équation de (3) On obtient donc de la première équation de (3) que

(83)

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = \frac{1}{r^2}$$

soit

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

(5)

et donc

$$A_\theta = -\frac{\sin \theta}{r} \varphi$$

Vérifions que la dernière équation de (3) est alors satisfaite :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = \frac{\partial}{\partial r} \left( -r \frac{\sin \theta}{r} \varphi \right) = 0 \quad \underline{\underline{OK}}$$

On a donc trouvé un potentiel vecteur  $\vec{A}$  pour le champ  $\vec{u}$ , donné par

$$\vec{A} = \vec{A}(r, \theta, \varphi) = -\frac{\sin \theta}{r} \varphi \vec{u}_\theta$$

Il est alors clair que, de même que le champ  $\vec{u}$  n'est pas défini à l'origine, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  ci-dessus n'est pas non plus défini.

Soient maintenant deux surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  s'appuyant sur un contour fermé  $\gamma$  et pouvant être déformées continuellement l'une en l'autre sans que aucune surface intermédiaire ne passe par l'origine. Soient  $d\Omega_{\Sigma, \Sigma'}$  les angles solides calculés

respectivement avec  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , on a par définition

$$d\Omega_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} ds \vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{u} \quad ; \quad d\Omega_{\Sigma'} = \iint_{\Sigma'} ds \vec{n}_{\Sigma'} \cdot \vec{u}$$

Or, puisque aucune des surfaces ne contient  $O$ , on peut y écrire  $\vec{u} = \text{rot } \vec{A}$  (puisque l'on connaît un potentiel vecteur pour  $\vec{u}$ ), et donc, avec le théorème de Stokes pour le rotationnel,

$$d\Omega_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} ds \vec{n}_{\Sigma} \cdot \vec{u} = \iint_{\Sigma} ds \vec{n}_{\Sigma} \cdot \text{rot } \vec{A} = \oint_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{A}$$

et

$$d\Omega_{\Sigma'} = \iint_{\Sigma'} ds \vec{n}_{\Sigma'} \cdot \vec{u} = \iint_{\Sigma'} ds \vec{n}_{\Sigma'} \cdot \text{rot } \vec{A} = \oint_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{A}$$

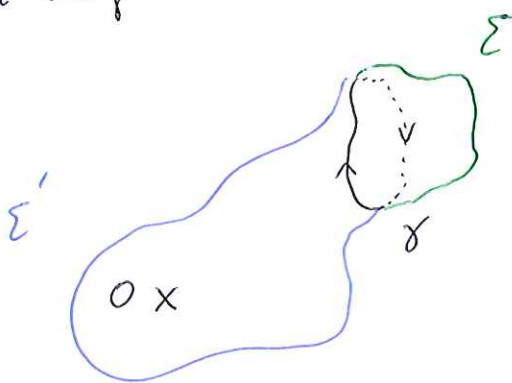
soit donc

$$d\Omega_{\Sigma} = d\Omega_{\Sigma'}$$

b) Soit un contour fermé orienté  $\gamma$ . On construit une première surface  $\Sigma$  telle que le volume délimité par  $\Sigma$  et l'intérieur de  $\gamma$  ne contienne pas l'origine. On construit ensuite une deuxième surface  $\Sigma'$  telle que le volume délimité par  $\Sigma'$  et l'intérieur de  $\gamma$  contienne l'origine. On dénote  $d\Omega_{\Sigma}$  et  $d\Omega_{\Sigma'}$  les angles solides calculés à partir des surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , ie

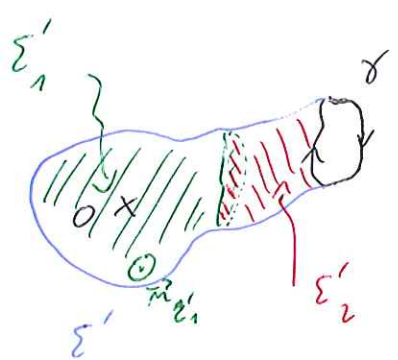
$$d\Omega_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} d\vec{s} \cdot \vec{u}$$

$$d\Omega_{\Sigma'} = \iint_{\Sigma'} d\vec{s} \cdot \vec{u}$$



On divise maintenant la surface  $\Sigma'$  en deux surfaces :

- i) une surface fermée  $\Sigma'_1$  incluant l'origine
- ii) une surface  $\Sigma'_2$  s'appuyant sur le contour  $\gamma$



On a alors

$$\iint_{\Sigma'} d\vec{s} \cdot \vec{u} = \iint_{\Sigma'_1} d\vec{s} \cdot \vec{u} + \iint_{\Sigma'_2} d\vec{s} \cdot \vec{u}$$

Or, on sait d'après la question précédente (puisque  $\Sigma$  et  $\Sigma'_2$  peut être déformées l'une en l'autre sans qu'aucune des surfaces intérieures ne passe par  $O$  et s'appuie toutes deux sur  $\gamma$ ) que

$$\iint_{\Sigma'_2} d\vec{s} \cdot \vec{u} = \iint_{\Sigma} d\vec{s} \cdot \vec{u} = d\Omega_{\Sigma}$$

et on a donc

$$\iint_{\Sigma'} d\vec{s} \cdot \vec{u} = \iint_{\Sigma'_1} d\vec{s} \cdot \vec{u} + d\Omega_{\Sigma} \tag{6}$$

De plus, la surface  $\Sigma'_1$ , fermée, peut être continuellement déformée en une sphère  $S$  de rayon  $R$ , d'où

$$\iint_{\Sigma'_1} d\vec{s} \cdot \vec{u} = \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{u} \tag{7}$$

Or, on a déjà calculé en 1) a) le flux de  $\vec{u}$  à travers une surface  $S$ , et on avait trouvé un flux égal à  $4\pi$ , ce qui nous donne pour (7)

$$\iint_{\Sigma'_1} d\vec{s} \cdot \vec{u} = 4\pi$$

et donc, substituant ce résultat dans (6),

$$\iint_{\Sigma'} d\vec{s}' \cdot \vec{a} = d\Omega_{\Sigma} + 4\pi$$

c'est à dire

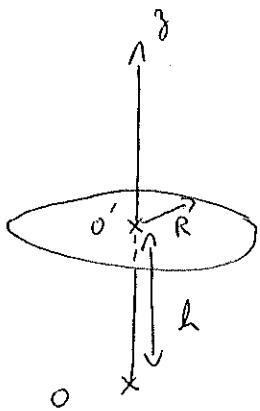
$$d\Omega_{\Sigma'} = d\Omega_{\Sigma} + 4\pi$$

Notons que si l'on avait orienté le contour fermé  $\gamma$  dans l'autre sens, on aurait obtenu

$$d\Omega_{\Sigma'} = d\Omega_{\Sigma} - 4\pi$$

De plus, si l'on avait considéré une surface  $\Sigma'$  plus complexe qui inclut l'origine plusieurs fois (le bord  $\partial\Sigma'$  de la surface tournant plusieurs fois autour de l'origine), on aurait obtenu un facteur  $\pm 4\pi$  pour chaque tour autour de l'origine. Ainsi, en toute généralité, l'angle solide est défini modulo  $4\pi$ .

c) Soit un cercle  $\mathcal{C}$  d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R$ , et tel que le centre  $O'$  du cercle à distance  $h$  de  $O$



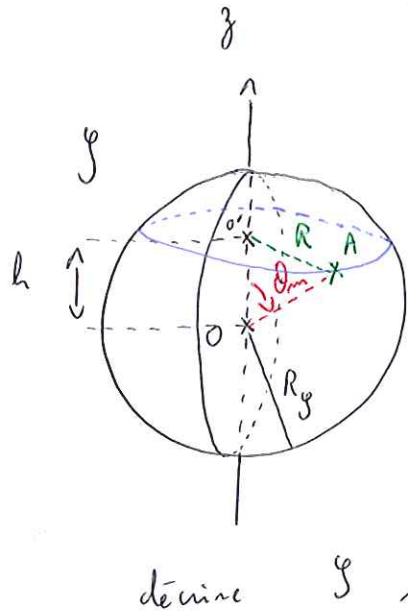
On souhaite calculer l'angle solide par rapport à  $O$  du cercle  $\mathcal{C}$ . On le fera de deux manières :

i) en utilisant une surface  $\mathcal{S}$  correspondant à une portion de sphère de centre  $O$  contenant  $\mathcal{C}$  ;

ii) en utilisant une surface  $S$  correspondant au disque situé dans le plan  $z = h$  délimité par  $\mathcal{C}$ .

i) En utilisant la portion de sphère  $\mathcal{S}$  : dénotons  $\Omega_y$  l'angle solide de  $\mathcal{E}$  par rapport à  $O$  calculé à partir de la portion de sphère  $\mathcal{S}$ , on a donc par définition (8)

$$\Omega_y = \iint_{\mathcal{S}} d\vec{s} \cdot \vec{a} = \iint_{\mathcal{S}} ds \vec{n} \cdot \vec{a}$$



Calculons cette intégrale en coordonnées sphériques. Tous les points de  $\mathcal{S}$  sont situés à une même distance  $R_y$  de l'origine  $O$ , où  $R_y$  est le rayon de  $\mathcal{S}$ . Ainsi, seuls les angles  $\theta$  (latitude) et  $\varphi$  (longitude) des coordonnées sphériques varient. Afin de déterminer  $\mathcal{S}$ , ces deux angles prennent les valeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \in [0, \theta_m] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

où l'angle maximal  $\theta_m$  peut être directement relié à la hauteur  $h$  et le rayon  $R_y$  via

$$\cos \theta_m = \frac{h}{R_y} \quad (8)$$

Ensuite, en coordonnées sphériques le champ  $\vec{a}$  est donné par

$$\vec{a} = \frac{\vec{u}_r}{R_y^2} \quad \text{sur la sphère}$$

On doit juste écrire l'élément de surface  $d\vec{s} = ds \vec{n}$ . Clairement, un élément de surface de  $\mathcal{S}$  est orienté selon  $\vec{u}_r$ , ie  $\vec{n} = \vec{u}_r$ . De plus, le module  $ds$  est simplement



l'élément de surface sphérique à rayon constant, ie

$$ds = R_y^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

d'où

$$d\vec{s} = ds \vec{n} = R_y^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{n}$$

On a donc

$$\Omega_y = \iint_y d\vec{s} \cdot \vec{a} = \iint_y R_y^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{n} \cdot \frac{\vec{n}}{R_y}$$

$$= \int_0^{\theta_m} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi [-\cos \theta]_0^{\theta_m} = 2\pi (1 - \cos \theta_m)$$

soit, avec (8),

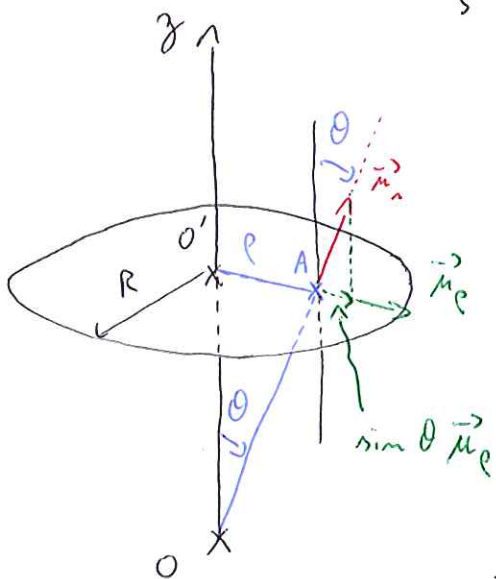
$$\boxed{\Omega_y = 2\pi \left(1 - \frac{h}{R_y}\right)}$$

(9)

ii) En utilisant le disque  $S$ ; démontrons maintenant  $\Omega_S$

l'angle solide par rapport à  $O$  calculé à partir du disque  $S$ , on a ici

$$\Omega_S = \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{a} = \iint_S ds \vec{n} \cdot \vec{a}$$



Soit  $A$  un point du disque  $S$ . Il est repéré en coordonnées sphériques par  $r \vec{n}$ , où  $r$  peut varier entre les valeurs  $h$  et  $R_y$  ( $R_y$ : rayon de la sphère  $S$  utilisée précédemment)

Alternativement, il peut être repéré par

$\rho \vec{u}_\rho + h \vec{u}_z$ , avec  $\rho$  la distance par rapport



au centre  $O'$  du cercle  $\mathcal{C}$ , et  $\vec{n}_\rho$  le vecteur unitaire radial des coordonnées polaires associées au disque. Le champ  $\vec{u}$  est toujours donné par  $\vec{u} = \vec{n}_r / r^2$  en coordonnées sphériques. Or, le vecteur unitaire  $\vec{n}_r$  des coordonnées sphériques peut être décomposé sur les vecteurs  $\vec{n}_\rho$  et  $\vec{n}_z$ , et on a

$$\vec{n}_r = \sin \theta \vec{n}_\rho + \cos \theta \vec{n}_z$$

(86)

Ainsi, le champ  $\vec{u}$  au point  $A$  vaut

$$\vec{u} = \frac{1}{r^2} (\sin \theta \vec{n}_\rho + \cos \theta \vec{n}_z)$$

De plus, une valeur donnée de  $r$  détermine complètement l'angle  $\theta$ , puisque

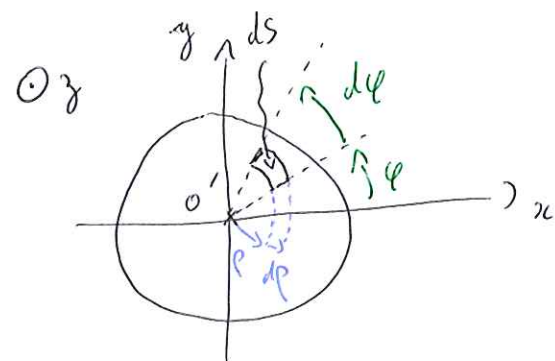
$$\cos \theta = \frac{h}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{\rho}{r}$$

soit pour le champ  $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{1}{r^3} (\rho \vec{n}_\rho + h \vec{n}_z) \quad (10)$$

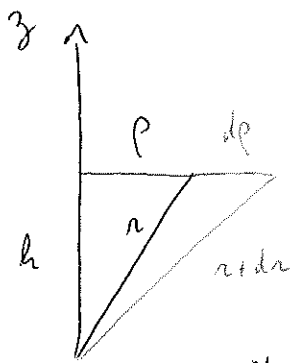
Déterminons maintenant l'élément de surface du disque,  $d\vec{s} = ds \vec{n}$ . Clairement,  $\vec{n} = \vec{n}_z$  puisque le disque est perpendiculaire à  $(Oz)$ . On doit maintenant évaluer le module  $ds$ . Or on a donc

$$ds = \rho d\rho d\varphi \quad (11)$$



en termes des coordonnées polaires du disque. On souhaite maintenant exprimer  $\rho d\rho$  en termes de  $r$  et  $dr$ , ie

des coordonnées sphériques.



Par Pythagore, on a  $r^2 = h^2 + p^2$  et

$$(r+dr)^2 = (p+dp)^2 + h^2$$

$$\Rightarrow r^2 + dr^2 + 2rdr = p^2 + dp^2 + 2pdp + h^2$$

soit avec  $r^2 = h^2 + p^2$

$$\cancel{h^2 + p^2} + 2rdr + dr^2 = \cancel{p^2 + h^2} + 2pdp + dp^2$$

$$\Rightarrow 2rdr + dr^2 = 2pdp + dp^2$$

et donc, en négligeant  $dr^2$  et  $dp^2$  qui sont des infinitésimales du 2<sup>e</sup> ordre,

$$2rdr = 2pdp$$

et on voit donc que

$$pdp = rdr \tag{12}$$

Substituant (12) dans (11) on tire donc

$$ds = r dr d\varphi \tag{13}$$

d'où l'élément de surface du disque

$$d\vec{S} = ds \vec{n} = r dr d\varphi \vec{n}_3 \tag{14}$$

En combinant (10) et (14) on obtient donc

$$d\vec{S} \cdot \vec{u} = r dr d\varphi \vec{n}_3 \cdot \frac{1}{r^3} (p \vec{n}_p + h \vec{n}_3)$$

d'où, puisque par construction  $\vec{n}_p \perp \vec{n}_3$ ,

$$d\vec{s} \cdot \vec{u} = \frac{h}{r^2} dr d\varphi \quad (15)$$

En ce qui concerne les variations des variables  $r$  et  $\varphi$  afin de décrire l'ensemble du disque  $S$ , on a

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \in [h, R_y] \\ \varphi \in (0, 2\pi] \end{array} \right.$$

87

On peut maintenant calculer l'angle solide  $\Omega_S$ , et on a, avec (15) et (16),

$$\begin{aligned} \Omega_S &= \iint_S d\vec{s} \cdot \vec{u} = \iint_S \frac{h}{r^2} dr d\varphi \\ &= h \int_h^{R_y} \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi h \left[ -\frac{1}{r} \right]_h^{R_y} = 2\pi h \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{R_y} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\Omega_S = 2\pi \left( 1 - \frac{h}{R_y} \right)} \quad (16)$$

Ce résultat est bien entendu en parfait accord avec l'angle solide  $\Omega_y$  calculé précédemment (cf (13)) en utilisant la portion de sphère  $S$ , et on a bien

$$\Omega_y = \Omega_S$$

Ceci est donc une illustration du résultat de la question

2)a) ci-dessus, les deux surfaces  $S$  et  $G$  considérées dans cette question c) pouvant en effet être déformées continuellement l'une en l'autre sans qu'aucune des surfaces intermédiaires ne contienne l'origine  $O$ .